第 28 卷第 1 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 28　No. 1
2015 年 2 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2015
文章编号:1673-1549(2015)01-0063-05　　DOI:10.11863/j. suse. 2015. 01. 15

曲面上测地线和短程线的性质

邢家省[1,2], 高建全[3], 罗秀华[3]

(1. 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京　100191;2. 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京　100191;
3. 平顶山教育学院, 河南　平顶山　467000)

摘　要:从曲面上曲线的测地曲率向量和测地曲率的定义出发,在测地线定义的基础上,给出测地线的三种充分必要条件,并给出应用中新的处理方法;发现了曲面上短程线的必要条件的三个结论正好对应于测地线的三个等价条件。

关键词:测地曲率向量;测地曲率;测地线;短程线

中图分类号:O186. 11　　**文献标志码:**A

引　言

关于曲面上的测地线,文献[1 -5]中给出了一种定义,没有给出测地线的等价性质,这在使用中非常不方便。关于测地线有三种充分必要条件,利用测地线的等价性质,可以简化一些结论的证明。关于曲面上短程线的必要条件,现有文献[1 -4]给出了两种证明过程,本文给出了一种新的证明过程,这三种证明过程的结果正好对应于测地线的三种条件。给出了球面上的测地线必在球面大圆上的证明。

1　测地曲率向量和测地曲率的定义

设 C^2 类正则曲面:

Σ: $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in \Delta$

记 $\vec{r}_i = \vec{r}_{u_i}$; $g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j, i, j = 1, 2$, $g_{ij} = g_{ji}$; $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g$; $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j}$。设 Γ 是曲面 Σ 上的一条曲线,其参数方程为:

$$u_1 = u_1(s), u_2 = u_2(s)$$

或

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1(s), u_2(s)) = \vec{r}(s)$$

这里 s 是该曲线的自然参数。

在任固定曲面 Σ 上一点 $P(u_1, u_2)$, 并设 T_P 为曲面 Σ 在 P 点的切平面。设 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 在 P 点的单位法向量,以 $\vec{\alpha}$ 表示曲线 Γ 上 P 点处的单位切向量;以 $\vec{\beta}$ 表示曲线 Γ 上 P 点处的主法向量, $\vec{\gamma}$ 是副法向量。

定义 1[1-6]　曲面 Σ 上曲线 Γ 在 P 点的单位切向量的导向量 $\vec{\alpha}'(s)$ 在切平面 T_P 上的投影向量 $\vec{\tau}_P = \vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$, 称为曲线 Γ 在 P 点的测地曲率向量。

关于测地曲率向量的几何意义,可见文献[2,5-6]。

称 $\mathrm{D}\vec{\alpha} = \mathrm{d}\vec{\alpha} - (\mathrm{d}\vec{\alpha} \cdot \vec{n})\vec{n}$ 为 $\vec{\alpha}(s)$ 沿曲线 Γ 的绝对微分[1-6]。显然 $\vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$ 与 $\vec{n}, \vec{\alpha}$ 都垂直。命 $\vec{\varepsilon} = \vec{n} \times \vec{\alpha}$, 则 $\vec{\alpha}, \vec{\varepsilon}, \vec{n}$ 是彼此正交的单位向量,并且构成一右手系。显然 $\vec{\alpha}'(s) - (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{n})\vec{n}$ 平行于 $\vec{\varepsilon}$。

定义 2[1-4]　曲面 Σ 上曲线 Γ 的切向量的导向量 $\vec{\alpha}'(s)$ 在 $\vec{\varepsilon}$ 上的投影向量 $\vec{\tau}_P = (\vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\varepsilon}$, 称为曲线 Γ 在 P 点的测地曲率向量。$\vec{\tau}_P = (\vec{r}''(s) \cdot \vec{\varepsilon})\vec{\varepsilon}$。

定义 3[1-4]　将 $\vec{r}''(s) \cdot \vec{\varepsilon}$ 称为曲线 Γ 在 P 点的测地曲率,记作 k_g, $k_g = \vec{r}''(s) \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{\tau}_P \cdot \vec{\varepsilon}$。

显然有

$$\vec{\tau}_P = k_g \vec{\varepsilon}$$

$$k\vec{\beta} = k_n \vec{n} + \vec{\tau}_P = k_n \vec{n} + k_g \vec{\varepsilon}$$

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

收稿日期:收稿日期:2014-09-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201020);北京航空航天大学校级重大教改项目(201401)

作者简介:邢家省(1964-),男,河南泌阳人,副教授,博士,主要从事偏微分方程、微分几何方面的研究,(E-mail)xjsh@ buaa. edu. cn

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}''(s) - (\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n} = (\vec{r}''(s)\cdot\vec{\varepsilon})\vec{\varepsilon}$$

$$k_g = \vec{r}''(s)\cdot\vec{\varepsilon} = (\vec{r}''(s),\vec{n},\vec{\alpha}) = (\vec{r}''(s),\vec{n},\vec{r}'(s)) = (\vec{r}'(s),\vec{r}''(s),\vec{n})$$

2 曲面上曲线的测地曲率的一般计算公式

注意到 $k_g = (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{n})$，将

$$\vec{r}'(s) = \sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i\frac{du_i}{ds}$$

$$\vec{r}''(s) = \sum_{i,j=1}^{2}\vec{r}_{ij}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} + \sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i\frac{d^2u_i}{ds^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\times\vec{r}_2\|} = \frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{\sqrt{g}}$$

代入测地曲率的计算公式，经过计算[6]，得

$$\begin{aligned}k_g &= (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{n}) = \sqrt{g}\left(\frac{du_1}{ds}\frac{d^2u_2}{ds^2} - \frac{du_2}{ds}\frac{d^2u_1}{ds^2}\right) + \\ &\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{du_1}{ds}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{11}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2) - g_{12}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1)]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} + \\ &\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{du_2}{ds}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{21}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2) - g_{22}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1)]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} = \\ &\sqrt{g}\left\{\frac{du_1}{ds}\left(\frac{d^2u_2}{ds^2} + \frac{1}{g}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{11}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2) - g_{12}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1)]\right.\right. \\ &\left.\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right) - \frac{du_2}{ds}\left(\frac{d^2u_1}{ds^2} + \frac{1}{g}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{22}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1) - \right. \\ &\left.\left. g_{21}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2)]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\right\} \qquad (1)\end{aligned}$$

式(1)是测地曲率的一般计算公式，方便于直接使用。

利用曲面论的基本方程式中的记号[1-8]，可将(1)式化为：

$$\begin{aligned}&\sqrt{g}\left\{\frac{du_1}{ds}\left(\frac{d^2u_2}{ds^2} + \frac{1}{g}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{11}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2) - g_{12}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1)]\right.\right. \\ &\left.\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right) - \frac{du_2}{ds}\left(\frac{d^2u_1}{ds^2} + \frac{1}{g}\sum_{i,j=1}^{2}[g_{22}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_1) - \right. \\ &\left.\left. g_{21}(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_2)]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\right\} = \\ &\sqrt{g}\left\{\frac{du_1}{ds}\left(\frac{d^2u_2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}[g^{22}\Gamma_{2ij} + g^{21}\Gamma_{1ij}]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right) - \right. \\ &\left.\frac{du_2}{ds}\left(\frac{d^2u_1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}[g^{11}\Gamma_{1ij} + g^{12}\Gamma_{2ij}]\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\right\} = \\ &\sqrt{g}\left\{\frac{du_1}{ds}\left(\frac{d^2u_2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right) - \right. \\ &\left.\frac{du_2}{ds}\left(\frac{d^2u_1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\right\}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}k_g &= (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{n}) = \\ &\sqrt{g}\left\{\frac{du_1}{ds}\left(\frac{d^2u_2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right) - \right. \\ &\left.\frac{du_2}{ds}\left(\frac{d^2u_1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\right\} = \\ &\sqrt{g}\begin{vmatrix}\frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} \\ \frac{d^2u_1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} & \frac{d^2u_2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\end{vmatrix} \qquad (2)\end{aligned}$$

利用 $k_g\vec{\varepsilon} = \vec{r}''(s) - k_n\vec{n}$，而

$$\vec{r}'(s) = \sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i\frac{du_i}{ds}$$

$$\vec{r}''(s) = \sum_{k,j=1}^{2}\vec{r}_{kj}\frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds} + \sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i\frac{d^2u_i}{ds^2}$$

再由曲面的基本方程

$$\vec{r}_{kj} = \sum_{i=1}^{2}\Gamma_{kj}^{i}\vec{r}_i + b_{kj}\vec{n}$$

到得

$$\vec{r}''(s) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + \sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{kj}^{i}\frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\vec{r}_i + \sum_{k,j=1}^{2}b_{kj}\frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds}\vec{n}$$

于是

$$k_g\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + \sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{kj}^{i}\frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds}\right)\vec{r}_i + \left(\sum_{k,j=1}^{2}b_{kj}\frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds} - k_n\right)\vec{n} \qquad (3)$$

将(3)式两边与 $\vec{\varepsilon}$ 作内积，亦可得出(2)式。

3 曲面上测地线的定义及测地线的充分必要条件

定义 4[1-5] 曲面上的一条曲线，如果它在每一点处的测地曲率恒等于零，即 $k_g = 0$，则称它为曲面上的测地线。

例 1 球面上的大圆是测地线。

设球的半径为 R，球心在坐标原点，设 $\vec{r} = \vec{r}(s)$ 是球面 Σ 上的大圆，由于 $k = \frac{1}{R}, k_n = \frac{1}{R}, k^2 = k_g^2 + k_n^2$，得 $k_g = 0$。

或者，由于球面上的大圆是平面曲线，显然 $[\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s)] \perp \vec{r}(s)$，$\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{r}(s)$，所以 $k_g = [\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s)]\cdot\vec{n}(s) = 0$。

或者，由于球面上的大圆是平面曲线，显然 $\vec{r}'(s) \perp \vec{r}(s)$，$\vec{r}'(s) \perp \vec{r}''(s)$，所以 $\vec{r}''(s) // \vec{r}(s)$，又 $\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{r}(s)$，

从而 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$，故有 $k_g=(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{n})=0$。

定理 1　球面上的测地线必在球面的大圆上。

设球心在坐标原点，设 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是球面 Σ 上的测地线，在球面上，有 $\vec{n}//\vec{r}(s)$，因为 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是测地线，所以 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$，于是 $\vec{r}''(s)//\vec{r}(s)$；由于

$$[\vec{r}(s)\times\vec{r}'(s)]'=$$
$$\vec{r}'(s)\times\vec{r}'(s)+\vec{r}(s)\times\vec{r}''(s)=\vec{o}$$

从而 $\vec{r}(s)\times\vec{r}'(s)=\vec{C}$（常向量），显然 $\vec{r}(s)\perp\vec{C}$，由此得到 $\vec{r}(s)$ 在过球心的平面上，故 $\vec{r}(s)$ 在过球面的一个大圆上。

定理 2　设 $\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是曲面 Σ 上的曲线，s 是曲线的自然参数；它是测地线的充分必要条件 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$。

证明　证法 1：充分性：设 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$，则有 $k_g=(\vec{r}'(s),\vec{r}''(s),\vec{n})=0$，所以 Γ 是曲面上的测地线。

必要性：设 Γ 是曲面上的测地线，$k_g=0$，则有 $(\vec{r}'(s),\vec{r}''(s),\vec{n})=k_g=0$，所以 $\vec{r}'(s),\vec{r}''(s),\vec{n}$ 共面，存在不全为零的实数 a,b,c，使得 $a\vec{r}'(s)+b\vec{r}''(s)+c\vec{n}=0$，将此式与 $\vec{r}'(s)$ 作内积，得到 $a=0$，显然 $b\neq 0$（假如 $b=0$，则有 $c=0$，从 $\vec{r}'(s),\vec{r}''(s),\vec{n}$ 线性无关，矛盾），于是 $b\vec{r}''(s)+c\vec{n}=0$，$\vec{r}''(s)=-\dfrac{c}{b}\vec{n}$，即得 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$。

证法 2：利用

$$k_g\vec{\varepsilon}=\vec{\alpha}'(s)-(\vec{\alpha}'(s)\cdot\vec{n})\vec{n}$$
$$k_g\vec{\varepsilon}=\vec{r}''(s)-(\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n}$$

若 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$，显然有 $\vec{r}''(s)=(\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n}$，从而 $k_g\vec{\varepsilon}=\vec{r}''(s)-(\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n}=\vec{o}$，故有 $k_g=0$；反之，若 $k_g=0$，则有

$$\vec{r}''(s)-(\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n}=k_g\vec{\varepsilon}=\vec{o}$$

于是 $\vec{r}''(s)=(\vec{r}''(s)\cdot\vec{n})\vec{n}$，即有 $\vec{r}''(s)//\vec{n}$。由于 $\vec{n}\cdot\vec{r}_i=0$，$i=1,2$，于是可得如下结论。

定理 3　设 $\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是曲面 Σ 上的曲线，s 是曲线的自然参数；它是测地线的充分必要条件是 $\vec{r}''(s)\cdot\vec{r}_i=0$，$i=1,2$。

利用(3)式，即可得到：

定理 4[1-5]　设 $\vec{r}=\vec{r}(u_1(s),u_2(s))=\vec{r}(s)$ 是曲面 Σ 上的曲线，s 是曲线的自然参数，它是测地线的充分必要条件是 $\dfrac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}s^2}+\sum\limits_{k,j=1}^{2}\Gamma_{kj}^{i}\dfrac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}s}=0$，$i=1,2$。

定理 5[1-5]　假定曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切，若 C 是 S_1 上的测地线，则 C 也必定是 S_2 上的测地线。

证明　证法 1：因曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切，故曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 的单位法向量 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ 平行，即 $\vec{n}_1=\pm\vec{n}_2$，因为 C 是 S_1 上的测地线，所以 $\vec{r}''(s)//\vec{n}_1$，于是 $\vec{r}''(s)//\vec{n}_2$，故 C 也是 S_2 上的测地线。

证法 2：因曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 相切，故曲面 S_1 和 S_2 沿曲线 C 的单位法向量 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ 平行，即 $\vec{n}_1=\pm\vec{n}_2$，因 C 是 S_1 上的测地线，则 $\mathrm{d}\vec{\alpha}-(\mathrm{d}\vec{\alpha}\cdot\vec{n}_1)\vec{n}_1=0$，即得 $\mathrm{d}\vec{\alpha}-(\mathrm{d}\vec{\alpha}\cdot\vec{n}_2)\vec{n}_2=0$，所以 C 也是 S_2 上的测地线。

4　曲面上短程线必是测地线的证明方法

给定曲面 Σ，设 P,Q 是曲面 Σ 上的两点，在曲面 Σ 上连接 P,Q 两点的曲线中，弧长最小的曲线称为曲面 Σ 上连结 P,Q 的短程线[1-5]。因此需要寻找曲面上的曲线是短程线的必要条件。

变分引理：设 $f(x)\in C(a,b)$，若对任意 $\varphi(x)\in C_0^2(a,b)$，都有 $\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，则有 $f(x)=0,x\in(a,b)$。

设 Γ 曲面 Σ 上连结 P,Q 的曲线弧段，其参数方程为 $u_1=u_1(s),u_2=u_2(s),s_1\leqslant s\leqslant s_2$，其中 $u_i(s)\in C^2[s_1,s_2]$，$u_i(s_1),u_i(s_2)$ 为定值，s 是该曲线的弧长参数。

曲线 Γ 的向量表示为：

$$\vec{r}=\vec{r}(s)=\vec{r}(u_1(s),u_2(s)),s_1\leqslant s\leqslant s_2$$

定理 6　若曲线 Γ 是曲面 Σ 上的短程线，则有在曲面 Σ 上沿曲线 Γ 成立 $\vec{r}''(s)\cdot\vec{r}_{u_1}=0$，$\vec{r}''(s)\cdot\vec{r}_{u_2}=0$。

证明　记 $W_0=\{w(s);w(s)\in C_0^2(s_1,s_2)\}$，设 Γ_ε 曲面上连结 P,Q 的曲线弧段，其方程为：

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(s,\varepsilon)=\vec{r}(u_1(s)+\varepsilon w_1(s),u_2(s)+\varepsilon w_2(s)),$$
$$s_1\leqslant s\leqslant s_2$$

其中，$w_i(s)\in W_0,i=1,2$。曲线 Γ_ε 弧长为：

$$L(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})=\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}\cdot\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$$

假若 Γ 是短程线，则 $L(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})$ 在 $\varepsilon=0$ 处达到极小值，于是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}L(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})|_{\varepsilon=0}=0$，直接求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}L(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})=\int_{s_1}^{s_2}\frac{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}}{\sqrt{\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}}}\mathrm{d}s$$

由于

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}=\vec{r}_{u_1}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})(u'_1(s)+\varepsilon w'_1(s))+$$
$$\vec{r}_{u_2}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})(u'_2(s)+\varepsilon w'_2(s))$$
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial s}=\vec{r}_{u_1}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})w'_1(s)+$$
$$\vec{r}_{u_2}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})w'_2(s)+$$
$$[\vec{r}_{u_1u_2}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})w_1(s)+\vec{r}_{u_1u_2}(\vec{u}+\varepsilon\vec{w})w_2(s)]\cdot$$

$$(u'_1(s)+\varepsilon w'_1(s))+$$
$$[\vec r_{u_2u_1}(\vec u+\varepsilon\vec w)w_1(s)+\vec r_{u_2u_2}(\vec u+\varepsilon\vec w)w_2(s)]\cdot$$
$$(u'_2(s)+\varepsilon w'_2(s))$$

所以

$$\frac{\partial\vec\rho}{\partial s}\Big|_{\varepsilon=0}=\vec r'(s)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\vec\rho}{\partial s}\Big|_{\varepsilon=0}=\vec r_{u_1}w'_1(s)+\vec r_{u_2}w'_2(s)+$$
$$[\vec r_{u_1u_1}w_1(s)+\vec r_{u_1u_2}w_2(s)]u'_1(s)+$$
$$[\vec r_{u_2u_1}w_1(s)+\vec r_{u_2u_2}w_2(s)]u'_2(s)$$

$$\frac{\partial\vec\rho}{\partial s}\cdot\frac{\partial\vec\rho}{\partial s}\Big|_{\varepsilon=0}=\vec r'(s)\cdot\vec r'(s)=1$$

从而

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm d\varepsilon}L(\vec u+\varepsilon\vec w)\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot\vec r_{u_1}w'_1(s)\mathrm ds+$$
$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot\vec r_{u_2}w'_2(s)\mathrm ds+$$
$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot[\vec r_{u_1u_1}w_1(s)+\vec r_{u_1u_2}w_2(s)]u'_1(s)\mathrm ds+$$
$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot[\vec r_{u_2u_1}w_1(s)+\vec r_{u_2u_2}w_2(s)]u'_2(s)\mathrm ds$$

利用分部积分,得

$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot\vec r_{u_1}w'_1(s)\mathrm ds=$$
$$-\int_{s_1}^{s_2}[\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_1}+\vec r'(s)\cdot(\vec r_{u_1u_1}u'_1(s)+$$
$$\vec r_{u_1u_2}u'_2(s))]w_1(s)\mathrm ds$$
$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r'(s)\cdot\vec r_{u_2}w'_2(s)\mathrm ds=$$
$$-\int_{s_1}^{s_2}[\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_2}+\vec r'(s)\cdot(\vec r_{u_2u_1}u'_1(s)+$$
$$\vec r_{u_2u_2}u'_2(s))]w_2(s)\mathrm ds,$$

于是

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm d\varepsilon}L(\vec u+\varepsilon\vec w)\Big|_{\varepsilon=0}=$$
$$-\Big[\int_{s_1}^{s_2}\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_1}w_1(s)\mathrm ds+\int_{s_1}^{s_2}\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_2}w_2(s)\mathrm ds\Big]$$

由此得到

$$\int_{s_1}^{s_2}\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_1}w_1(s)\mathrm ds+\int_{s_1}^{s_2}\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_2}w_2(s)\mathrm ds=0$$

任意 $w_i(s)\in W_0,i=1,2$, 故得在曲面上沿曲线 Γ 成立 $\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_1}=0$, $\vec r''(s)\cdot\vec r_{u_2}=0$。由此得出 $\vec r''(s)\,/\!/\,\vec n$, 所以短程曲线 Γ 的测地曲率[1-8]:

$$k_g=(\vec r'(s),\vec r''(s),\vec n)=0$$

短程曲线 Γ 应满足的方程:利用 $\vec r''(s)\cdot\vec r_i=0$, $i=1,2$。由于

$$\vec r'(s)=\sum_{j=1}^{2}\vec r_j\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}$$

$$\vec r''(s)=\sum_{k,j=1}^{2}\vec r_{kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}+\sum_{j=1}^{2}\vec r_j\frac{\mathrm d^2u_j}{\mathrm ds^2}$$

从而得到

$$\sum_{k,j=1}^{2}\vec r_{kj}\cdot\vec r_i\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}+\sum_{j=1}^{2}\vec r_j\cdot\vec r_i\frac{\mathrm d^2u_j}{\mathrm ds^2}=0$$

即得短程曲线 Γ 满足的方程为:

$$\sum_{j=1}^{2}g_{ij}\frac{\mathrm d^2u_j}{\mathrm ds^2}+\sum_{k,j=1}^{2}\vec r_{kj}\cdot\vec r_i\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}=0,\ i=1,2$$

由于 $\Gamma_{ikj}=\vec r_i\cdot\vec r_{kj}$ [2-5],即得

$$\sum_{j=1}^{2}g_{ij}\frac{\mathrm d^2u_j}{\mathrm ds^2}+\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{ikj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}=0i=1,2$$

表示为向量形式:

$$\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm d^2u_1}{\mathrm ds^2}\\\dfrac{\mathrm d^2u_2}{\mathrm ds^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{1kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\\\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{2kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\end{pmatrix}=0$$

两边乘以 $\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}\\g^{21}&g^{22}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm d^2u_1}{\mathrm ds^2}\\\dfrac{\mathrm d^2u_2}{\mathrm ds^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}\\g^{21}&g^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{1kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\\\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{2kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm d^2u_1}{\mathrm ds^2}\\\dfrac{\mathrm d^2u_2}{\mathrm ds^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{l=1}^{2}g^{1l}\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{lkj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\\\displaystyle\sum_{l=1}^{2}g^{2l}\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma_{lkj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\end{pmatrix}=0$$

由曲面的基本方程中系数的关系[1-7],得到

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm d^2u_1}{\mathrm ds^2}\\\dfrac{\mathrm d^2u_2}{\mathrm ds^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma^1_{kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\\\displaystyle\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma^2_{kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}\end{pmatrix}=0$$

即

$$\frac{\mathrm d^2u_i}{\mathrm ds^2}+\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma^i_{kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}=0,\ i=1,2$$

故得

$$\frac{\mathrm d^2u_i}{\mathrm ds^2}+\sum_{k,j=1}^{2}\Gamma^i_{kj}\frac{\mathrm du_k}{\mathrm ds}\frac{\mathrm du_j}{\mathrm ds}=0,i=1,2$$

这正是曲面上的测地线的参数方程[1-5]。

关于曲面上短程线的必要条件的另外两种证明方法,可见文献[1-4]。

曲面上二次光滑的短程线必是测地线,反之曲面上的测地线未必是短程线。曲面上非二次光滑的短程线未必是测地线。

(下转第 86 页)