第 28 卷第 1 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 28 No. 1
2015 年 2 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2015
文章编号:1673-1549(2015)01-0067-04 DOI:10.11863/j.suse.2015.01.16

一类具粘性阻尼项的拟线性波动方程解的存在性

宋瑞丽[1], 王宏伟[2]

(1. 中原工学院信息商务学院, 郑州 450007;2. 安阳师范学院数学与统计学院, 河南 安阳 455000)

摘 要:针对三维空间中一类具有粘性阻尼项的拟线性波动方程的初边值问题,用 Galerkin 方法和紧性原理,证明了该问题局部广义解和局部古典解的存在性和唯一性。

关键词:具粘性阻尼;拟线性波动方程;局部解;初边值问题

中图分类号:O175.29;O175.27 **文献标志码**:A

引 言

本文研究三维初边值问题

$$u_{tt} - \Delta f(u) - \Delta u_t + \alpha |u_t|^{p-1} u_t = \beta |u|^{q-1} u, (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{1}$$

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), (x,t) \in \overline{\Omega} \tag{3}$$

其中,$\alpha > 0, \beta > 0, p \geqslant 1, q > 1$ 为常数,$f(s)$ 是非线性函数,Ω 是 R^3 中具有光滑边界的有界区域。

方程(1)是在控制粘弹性固体组成的变率型材料的运动中提出的一类具阻尼项非线性波动方程[1-2]。具阻尼项波动方程解的存在性是近年来偏微分方程研究的热点,很多文献对此类方程已有研究[3-6]。李玉环,刘盈盈和穆春来用 Δu 代替方程(1)中的 $\Delta f(u)$,在动态边界条件下给出了解爆破的条件[7]。Yang zhijian, Chen guowang 分别用 $f(u_t)$, $g(u)$ 代替方程(1)中的 $\alpha|u_t|^{p-1}u_t$, $\beta|u|^{q-1}u$, 在一维空间中证明了方程(1)~(3)整体解的存在唯一性[8]。Chen guowang, Yue hongyun 和 Wang shubin 在一维空间中证明了问题(1)~(3)局部解的存在性并给出解爆破的条件[9]。李敏和林国广添加阻尼项 $\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau$ 并用 Δu 代替方程(1)中的 $\Delta f(u)$,在 $\alpha \neq 1$ 时,证明该方程解的存在性和指数衰减性[10]。陈杰诚,范大山和张纯洁证明了带阻尼波动方程在小初值下 Cauchy 问题的全局解[11]。本文在三维空间中,用 Galerkin 方法和紧性原理,研究问题(1)~(3)局解的存在唯一性。

本文采用记号:$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 空间的内积,$\|\cdot\|_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 和 $\|\cdot\|_{m(\Omega)}$ 分别表示空间 $L^p(\Omega) (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 和 $H^m(\Omega)$ 的范数,特地有 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ 表示空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的范数。$C_i (i = 1,2,\cdots)$ 表示不依赖于 N 和 t 的正常数。

1 局部解的存在性和唯一性

令 $\{y_i(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交基,即 $\nabla^2 y + \lambda y = 0$,设 $u_N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{N,i}(t) y_i(x)$ 是问题(1)~(3)的 Galerkin 近似解。假定 $u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i y_i(x)$, $u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i(x)$,其中 η_i 和 $\xi_i (i = 1,2,\cdots)$ 是常数。则 $u_N(x,t)$ 由下列常微分方程组确定

$$(u_{Ntt} - \nabla^2 u_{Nt}, y_s) = (\nabla^2 f(u_N) + \alpha |u_{Nt}|^{p-1} u_{Nt} + \beta |u_N|^{q-1} u_N, y_s) s = 1,2,\cdots,N \tag{4}$$

$$\alpha_{Ns}(0) = \eta_s, \dot{\alpha}_{Ns}(0) = \xi_s, s = 1,2,\cdots,N \tag{5}$$

其中,$\dot{\alpha}_{Ns}(t)$ 表示 $\alpha_{Ns}(t)$ 对 t 求导。

引理 1 设 $f \in C^3(R)$, $|f(s)| \leqslant K|s|^v$, $|f'(s)| \leqslant$

收稿日期:2014-06-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171311);河南省自然科学基金项目(132300410351)

作者简介:宋瑞丽(1978-),女,河南新野人,讲师,硕士,主要从事偏微分方程方面的研究,(E-mail)srli070911@sina.com

$K|s|^{v-1}$ 等和 $f''(0)=0$，其中 $v\geqslant 2$ 是自然数，$K>0$ 为常数。$q>1,p\geqslant 1$ 且 $\min\{p+1,q+1\}\geqslant 3$，如果

$$\lim_{N\to\infty}E_N(0)=A=(u_0,u_0)+(\nabla u_0,\nabla u_0)+(\nabla^3u_0,\nabla^3u_0)+(u_1,u_1)+(\nabla u_1,\nabla u_1)+(\nabla^2u_1,\nabla^2u_1)+1<\infty \tag{6}$$

那么方程(4)、(5)在 $[0,t_1]$ 上有古典解 $\alpha(t)=(\alpha_{N1}(t),\alpha_{N2}(t),\cdots\alpha_{NN}(t))$，并且

$$E_N(t)\leqslant\frac{A}{[1+(\delta-1)M_1A^{\delta-1}t_1]^{\frac{1}{\delta-1}}}=M \tag{7}$$

一致有界，其中 $t_1>0,M_1>0$ 是不依赖于界 M 和 N 的常数，$\delta=\max\left\{\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2},\frac{v+1}{2},v,1\right\}$，且

$$E_N(t)=(u_N,u_N)+(\nabla u_N,\nabla u_N)+(\nabla^3u_N,\nabla^3u_N)+(u_{Nt},u_{Nt})+(\nabla u_{Nt},\nabla u_{Nt})+(\nabla^2u_{Nt},\nabla^2u_{Nt})+1<\infty \tag{8}$$

证明 根据常微分方程理论知道方程(4)、(5)的局部解总是存在的。记 $[0,T_N]$ 是解存在的最大时间区间，对解进行估计。(4)两边同乘以 $2(1+\lambda_s+\lambda_s^2)\dot{\alpha}_{Ns}(t)$，对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，两边各加上 $2[(u_N,u_{Nt})-(\nabla^2u_N,u_{Nt})+(\nabla^3u_N,\nabla^3u_{Nt})]$，并对 x 分部积分，得

$$\frac{\mathrm{d}E_N(t)}{\mathrm{d}t}+2(\|\nabla u_{Nt}\|^2+\|\nabla^2u_{Nt}\|^2+\|\nabla^3u_{Nt}\|^2)=2(\beta|u_N|^{q-1}u_N-\alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt}+\nabla^2f(u_N),u_{Nt}-\nabla^2u_{Nt}+\nabla^4u_{Nt})+2[(u_N,u_{Nt})-(\nabla^2u_N,u_{Nt})+(\nabla^3u_N,\nabla^3u_{Nt})] \tag{9}$$

用 Gagliardo－Nirenberg 内插定理和(8)式可得

$$\|u_N\|_{W^{\bar m,2}(\Omega)}\leqslant C_1\|u_N\|_{H^m(\Omega)}\leqslant C_2(E_N(t))^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$u_{Nt\,W^{\tilde m,2}(\Omega)}\leqslant C_3u_{Nt\,H^{m-1}(\Omega)}\leqslant C_4(E_N(t))^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

其中，$0\leqslant\bar m\leqslant m-1\leqslant 4,0\leqslant\tilde m\leqslant m-2\leqslant 3$，用 Hölder 不等式，式(10)、式(11)和引理 1 的假定，可得

$$|2(\beta|u_N|^{q-1}u_N,u_{Nt}-\nabla^2u_{Nt})|\leqslant 2\beta(\|u_N\|_{2q}^q\|u_N\|+q\|u_N\|_\infty^{q-1}\|\nabla u_N\|\|\nabla u_{Nt}\|)\leqslant C_5(E_N(t))^{\frac{q+1}{2}} \tag{12}$$

$$|-2(\alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt},u_{Nt}-\nabla^2u_{Nt})|\leqslant 2\alpha(\|u_{Nt}\|_{2p}^p\|u_{Nt}\|+p\|u_{Nt}\|_\infty^{p-1}\|\nabla u_{Nt}\|^2)\leqslant C_6(E_N(t))^{\frac{p+1}{2}} \tag{13}$$

利用求导通过直接计算以及对 $f(s)$ 的假定，推出

$$\|\nabla^mf(\nabla^2u_N)\|\leqslant C_7\|u_N\|_{m+2(\Omega)}^v \tag{14}$$

由 Hölder 不等式，Cauchy 不等式和(8)式、(14)式可得

$$|2(\nabla^2f(u_N),u_{Nt}-\nabla^2u_{Nt})|\leqslant C_7(E_N(t))^v+C_8(E_N(t))^{\frac{v+1}{2}}+C_9E_N(t) \tag{15}$$

用微分法，经简单计算可得

$$\|\nabla^{m+1}(|u_N|^{q-1}u_N)\|\leqslant C_{10}\|u_N\|_{m+1(\Omega)}^q \tag{16}$$

$$\|\nabla^{m+1}(|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt})\|\leqslant C_{11}\|u_{Nt}\|_{m+1(\Omega)}^p \tag{17}$$

由(14)式、(16)式和(17) 式可得

$$|2(\beta|u_N|^{q-1}u_N,\nabla^4u_{Nt})|\leqslant C_{12}\|u_N\|_{2(\Omega)}^q\|\nabla^2u_{Nt}\|\leqslant C_{13}(E_N(t))^{\frac{q+1}{2}} \tag{18}$$

$$|-2(\alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt},\nabla^4u_{Nt})|\leqslant C_{14}\|u_{Nt}\|_{2(\Omega)}^p\|\nabla^2u_{Nt}\|\leqslant C_{15}(E_N(t))^{\frac{p+1}{2}} \tag{19}$$

$$|2(\nabla^2f(u_N),\nabla^4u_{Nt})|\leqslant C_{16}\|u_N\|_3^v\|\nabla^3u_{Nt}\|\leqslant C_{17}(E_N(t))^v+\|\nabla^3u_{Nt}\|^2 \tag{20}$$

用 Hölder 不等式和(8)式，有

$$|2[(u_N,u_{Nt})-(\nabla^2u_N,u_{Nt})+(\nabla^3u_N,\nabla^3u_{Nt})]|\leqslant 5E_N(t)+\|\nabla^3u_{Nt}\|^2 \tag{21}$$

把式(12、(13)、(15)、(18)－(21)代入式(9)中，令 $\delta=\max\left\{\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2},\frac{v+1}{2},v,1\right\}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}E_N(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant M_1(E_N(t))^\delta \tag{22}$$

其中，$M_1>0$ 是不依赖于 N 的常数。对任意的 $t\in(0,T_N)$，从(22)式可得

$$E_N(t)\leqslant\frac{E_N(0)}{[1+(1-\delta)M_1t(E_N(0))^{\delta-1}]^{\frac{1}{\delta-1}}}\leqslant\frac{A}{[1+(1-\delta)M_1tA^{\delta-1}]^{\frac{1}{\delta-1}}} \tag{23}$$

若取 t_1 使 $0<1+(1-\delta)M_1t_1A^{\delta-1}<\eta$ 成立，其中 $0<\eta<1$，则(7)式在 $[0,t_1]$ 上成立。这说明 T_N 有不依赖于 N 的正下界。引理 1 证毕。

引理 2 在引理 1 的条件下，问题(1)～(3)的近似解 u_N 有估计：

$$\|u_N\|_{3(\Omega)}+\|u_{Nt}\|_{2(\Omega)}\leqslant C_{18},t\in[0,t_1] \tag{24}$$

定理 1 设 $f\in C^3(R)$，$|f(s)|\leqslant K|s|^v$，$|f'(s)|\leqslant K|s|^{v-1}$ 等和 $f''(0)=0$，其中 $v\geqslant 2$ 是自然数，$K>0$ 为常数，$q>1,p\geqslant 1$ 且 $\min\{p+1,q+1\}\geqslant 3$。如果 $u_0\in H^2(\Omega),u_1\in H^2(\Omega)$，那么初边值问题(1)～(3)存在唯一的局部广义解 $u(x,t)$。

证明 方程(4)两边同乘以 $2\ddot{\alpha}_{N,s}(t)$，乘积对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，得

$$\|u_{Ntt}\|^2=(\nabla^2u_{Nt}+\nabla^2f(u_N)+\alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt}+\beta|u_N|^{q-1}u_N,u_{Ntt}) \tag{25}$$

利用 Cauchy 不等式，Hölder 不等式，式(14)、(16)、

(17)、(24)、(25)可得 $\|u_{Nt}\|^2 \leqslant C_{19}, t \in [0,t_1]$,从(24)式和 Sobolev 嵌入定理,推出

$$\|u_N\|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{Nt}\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant C_{22}, t \in [0,t_1] \tag{26}$$

其中 $0 < \lambda \leqslant 0.5$。由(26)式根据 Ascoli - Arzela 定理可知存在函数 $u(x,t)$ 和函数列 $\{u_N(x,t)\}$ 的子列,仍记为 $\{u_N(x,t)\}$,使得当 $N \to \infty$,$\{\nabla^i u_N(x,t)\}(i=0,1,2)$ 和 $\{u_{Nt}(x,t)\}$ 在 $\bar{Q}_T$ 上一致收敛于 $\nabla^i u(x,t)(i=0,1,2)$ 和 $u_t(x,t)$。根据弱紧性定理知子序列 $\{\nabla^i u_{Nt}(x,t)\}(i=1,2,)$ 在 $L^2(Q_{t_1})$ 中分别弱收敛于 $\{\nabla^i u_t(x,t)\}(i=1,2,)$,因此问题(1)~(3)存在局部广义解。下面证明局部广义解的唯一性。

假设 $u(x,t)$, $v(x,t)$ 是问题(1)~(3)的两个广义解。令 $\omega(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$,则

$$\omega_{tt} - (\nabla^2 f(u) - \nabla^2 f(v)) - \nabla^2 \omega_t + \alpha(|u_t|^{p-1}u_t - |v_t|^{p-1}v_t) = \beta(|u|^{q-1}u - |v|^{q-1}v), (x,t) \in \Omega \times (0,t_1) \tag{27}$$

$$\omega = 0, \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,t_1) \tag{28}$$

$$\omega(x,0) = 0, \omega_t(x,0) = 0, (x,t) \in \bar{\Omega} \tag{29}$$

(27)式乘以 $-2\nabla^2\omega_t$,两边同时加上 $2\omega\omega_t - 2\nabla^4\omega\omega_t$ 并在 Ω 上积分并由 Cauchy 不等式可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\omega\|^2 + \|\nabla\omega_t\|^2 + \|\nabla^2\omega\|^2) + 2\|\nabla^2\omega_t\|^2 \leqslant C_{23}(\|\omega\|^2 + \|\omega_t\|^2\|\nabla^2\omega\|^2 + \|\nabla^2\omega_t\|^2 \tag{30}$$

由(30)式和 Gronwell 不等式可得 $\|\omega\|^2 + \|\nabla\omega_t\|^2 + \|\nabla^2\omega\|^2 = 0$,因此 $u(x,t) = v(x,t)$。定理 1 得证。

为了证明问题(1)-(3)存在局部古典解,对近似解作进一步的估计。

引理3　假设引理 2 的条件成立,且 $f \in C^7(R)$, $f^{(2l-1)}(0) = 0, l = 1,2,3,4$, $u_0 \in H^7(\Omega), u_1 \in H^6(\Omega)$,则问题(1)-(3)的近似解有估计

$$\|u_N\|^2_{7(\Omega)} + \|u_{Nt}\|^2_{6(\Omega)} + \|u_{Ntt}\|^2_{4(\Omega)} + \|u_{Nt^3}\|^2_{2(\Omega)} \leqslant C \tag{31}$$

证明　方程(4)两边同乘以 $2(1+\lambda_s^6)\dot{\alpha}_{Ns}(t)$,对 $s = 1,2,\cdots,N$ 求和,两边各加上 $2[(u_N,u_{Nt}) + (\nabla^2 u_N, \nabla^{12}u_{Nt})]$ 并对 x 分部积分,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_N(t) + 2(\|\nabla u_{Nt}\|^2 + \|\nabla^7 u_{Nt}\|^2) = 2(\beta|u_N|^{q-1}u_N - \alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt} + \nabla^2 f(u_N), u_{Nt} - \nabla^{12}u_{Nt}) + 2[(u_N,u_{Nt}) + (\nabla^2 u_N, \nabla^{12}u_{Nt})] \tag{32}$$

其中 $I_N(t) = \|u_N\|^2 + \|\nabla^7 u_N\|^2 + \|u_{Nt}\|^2 + \|\nabla^6 u_{Nt}\|^2 + 1$。用 Hölder 不等式,Cauchy 不等式,类似的(12)、(13)式可得

$$|2(\beta|u_N|^{q-1}u_N, u_{Nt} - \nabla^{12}u_{Nt})| \leqslant C_{23}(I_N(t))^{\frac{q+1}{2}} \tag{33}$$

$$|-2(\alpha|u_{Nt}|^{p-1}u_{Nt}, \nabla^{12}u_{Nt})| \leqslant C_{24}(I_N(t))^{\frac{p+1}{2}} \tag{34}$$

由 Hölder 不等式,Cauchy 不等式,(32)式可得

$$|2(\nabla^2 f(\nabla^2 u_N), u_{Nt} - \nabla^{12}u_{Nt})| \leqslant C_{28}(I_N(t))^{\frac{v+1}{2}} + C_{28}(I_N(t))^v + \|\nabla^7 u_{Nt}\|^2 \tag{35}$$

$$2[(u_N,u_{Nt}) + (\nabla^2 u_N, \nabla^{10}u_{Nt})] \leqslant 4I_N(t) + \|\nabla^7 u_{Nt}\|^2 \tag{36}$$

把(33)-(36)式代入(32)式中,类似(22)式可推出

$$\|u_N\|^2_{7(\Omega)} + \|u_{Nt}\|^2_{6(\Omega)} \leqslant C_{30} \tag{37}$$

方程(4)两边同乘以 $\lambda_s^4\ddot{\alpha}_{N,s}(t)$,乘积对 $s = 1,2,\cdots,N$ 求和,利用 Cauchy 不等式,Hölder 不等式,类似(33)-(35)式的推导,可得

$$\|u_{Ntt}\|_{4(\Omega)} \leqslant C_{31} \tag{38}$$

方程(4)对 t 求导,两边同乘以 $\lambda_s^2\bar{\alpha}_{N,s}(t)$,乘积对 $s = 1,2,\cdots,N$ 求和,得

$$\|\nabla^2 u_{Nt^3}\|^2 = (\nabla^2 u_{Nt^2} + ((\nabla^2 f(u_N))_t + \alpha p|u_{Nt}|^{p-1}u_{Ntt} + \beta q|u_N|^{q-1}u_{Nt}, \nabla^4 u_{Nt^3}) \tag{39}$$

利用 Cauchy 不等式,Hölder 不等式,类似(33)-(35)式的推导,由(39)式可得

$$\|\nabla^2 u_{Nt^3}\|^2 \leqslant C_{32}, t \in [0,t_1] \tag{40}$$

结合(37)、(38)、(40)式可知(31)式成立。引理 3 证毕。

定理2　设 $f \in C^7(R)$, $|f(s)| \leqslant K|s|^v$, $|f'(s)| \leqslant K|s|^{v-1}$, $f^{(2l)}(0) = 0, l = 1,2,3,4$,其中 $v \geqslant 2$ 是自然数,$K > 0$ 为常数,$q > 1, p \geqslant 1$ 且 $\min\{p+1, q+1\} \geqslant 3$。如果 $u_0 \in H^7(\Omega), u_1 \in H^6(\Omega)$,那么初边值问题(1)-(3)存在唯一的局部古典解 $u(x,t)$。

证明　从(31)式和 Sobolev 嵌入定理得

$$\|u_N\|_{C^{5,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{Nt}\|_{C^{4,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{Ntt}\|_{C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})} + \|u_{Nt^3}\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant C$$

其中 $0 < \lambda \leqslant 0.5$。由(26)式,根据 Ascoli - Arzela 定理可知初边值问题(1)~(3)存在局部古典解其中 $u(x,t)$。显然初边值问题(1)~(3)的古典解也是唯一的。定理 2 证毕。

参 考 文 献:

[1] Andrews G,Ball J M.Asymptotic behavior and changes in phase in one-dimensional nonlinear viscoealsticity[J].J. Differential Equation,1982(44):336-341.

[2] Kawashima S,Shibata Y.Global existence and exponen-

tial stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity [J].Comm.Math.Phys,1992(148):189-208.

[3] Clements J.Existence theorems for a quasilinear evolution[J].SIAM J.Math,1974(26):745-752.

[4] 张媛媛,王宏伟,宋志华.具强阻尼项波动方程整体解的存在性[J].吉林师范大学学报:自然科学版,2013(3):25-27.

[5] 刘天花.3维Chemotaxis-fluid方程弱解的整体存在性[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(5):97-100.

[6] Yang zhijian.Global attrator for the Kirchhoff type equation with a strong dissipation[J].Differential Equations,2010,249(2):3258-3278.

[7] 李玉环,刘盈盈,穆春来.动态边界条件下一类强阻尼波动方程解的爆破[J].西南大学学报:自然科学版,2011,33(7):10-15.

[8] Yang Zhijian,Chen guowang.Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping[J].Math.Anal.Appl,2003(285):604-628.

[9] Chen guowang,Yue hongyun,Wang shubin.The initial boundary value problem ror quasi-linear wave equation with viscous damping[J].Math.Anal.Appl,2007(331):823-839.

[10] 李敏,林国广.带黏性项的强阻尼波动方程解的指数衰减性[J].中国科技信息,2011(10):47-49.

[11] 陈杰诚,范大山,张纯洁.阻尼波动方程在模空间上的一些估计[J].中国科学:数学,2013,43(4):355-364.

The Existence of Solution for a Kind of Viscous Damped Quasi-linear Wave Equations

SONG Ruili[1], *WANG Hongwei*[2]

(1.College of Information & Business, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China;
2.School of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang 455000, China)

Abstract: The existence and the uniqueness of the local generalized solution and the local classical solution for the initial boundary value problem for a class of viscous damping quasi-linear wave equation in three-dimensional space are proved by the Galerkin method and compactness principle.

Key words: viscous damping; quasi-linear wave equations; local solution; the initial boundary value problem