第 27 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 27 No. 6
2014 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2014
文章编号:1673-1549(2014)06-0084-02 DOI:10.11863/j.suse.2014.06.21

有限群的极小子群数与素因子数

黄彦华[a], 王 磊[b]

(四川理工学院 a.理学院;b.建筑工程学院, 四川 自贡 643000)

摘 要:极小子群是一类特殊的子群,在有限群结构的研究中起重要作用。有限群的极小子群的数量性质能够反映该群的许多性质。文章从极小子群的角度讨论群,并通过对不同性质的有限群进行讨论,给出了其极小子群数与素因子数的关系。

关键词:极小子群;幂零;循环子群;素因子

中图分类号:O152 **文献标志码**:A

引 言

群论是抽象代数中研究最早且最为成熟的基本代数系,不仅在数学的各个分支有着广泛的应用,而且在物理、化学和信息等领域都有着十分广泛的应用。而作为群论的基础部分,有限群也是群论中应用最为广泛的一支。有限群的子群与原群之间有着紧密的联系,子群的数量性质能够反映该原群的许多性质。通过子群的研究可以更好地将群论应用于各个相关的领域。

文献[1]对特定的极小子群数给出了原群的结构;文献[2]给出了有限群的极大子群的下界,并通过该下界得出具有特定结构的有限群;文献[3]利用极小子群的中心化子和正规化子对若干有限群的结构进行了刻画;文献[4]研究了极大子群同阶类类数对有限群结构的影响,极大子群个数 <5 以及极大子群数为 6 和 7 的有限群已分别在文献[5 - 7]里得到刻画。而极小子群作为极大子群的对偶,在有限群中扮演了一个重要角色,同时文献[8]给出了具有弱 H - 特征极小子群的有限群。

本文主要通过研究极小子群,讨论子群的个数对有限群结构的影响。本文讨论的群均为有限群,文中用 $\pi(G)$ 表示群 G 的相异素因子之集, $n(G)$ 表示 G 的极小子群数, $m(G)$ 表示群 G 的所有极大子群的集合。

1 预备知识

引理 1[2,9] 设 G 为初等交换 p - 群,其秩为 k, 则极大子群数 $|m(G)| = \dfrac{p^k - 1}{p - 1}$。

引理 2[2] 若 G 为有限非循环群, 则 $|m(G)| \geqslant |\pi(G)| + p$, 其中 p 为群 G 的最小素因子。

引理 3[10-11] 设 G 为有限群,则 $n(G) = 1$ 的充分必要条件为: G 为循环 p - 群或广义四元数群。

引理 4[12] 设 G 是有限群,则下述事项等价:(1) G 是幂零群;(2)若 $H < G$, 则 $H < N_G(H)$; (3) G 的每个极大子群 $M \trianglerighteq G$; (4) G 的每个 Sylow 子群都是正规的,因而 G 是诸 Sylow 子群的直积。

引理 5[13-14] 设 p 为素数,则 G 中 p 阶极小子群的个数 $n_p \equiv 1(\bmod p)$。

2 主要结果及其证明

定理 1 若 G 为循环群,则 $n(G) = |\pi(G)|$。

证明 若 G 为循环群,则 $G \cong Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_2^{r_2}} \times \cdots \times Z_{p_n^{r_n}}$。由引理 3 知, 循环 p - 群的极小子群数为 1, 则 $n(Z_{p_i^{r_i}}) = 1 (i = 1,2,\cdots,n)$, 从而有 $n(G) = n(Z_{p_1^{r_1}}) + n(Z_{p_2^{r_2}}) + \cdots + n(Z_{p_n^{r_n}}) = n = |\pi(G)|$。

定理 2 若 G 为幂零群,则 $n(G) \geqslant |\pi(G)|$。

收稿日期:2014-09-01

基金项目:桥梁无损检测与工程计算四川省高校重点实验室科研项目(2013QYJ02);四川理工学院校级项目(2013RC07)

作者简介:黄彦华(1982-),女,湖北荆州人,讲师,硕士,主要从事有限群论方面的研究,(E-mail)43156246@qq.com

证明 G 为幂零群,由引理 2 知,$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$,其中 $P_i \in Sylp_i(G)$,$i = 1,2,\cdots,n$。则 $n(G) = \sum_{i=1}^{n} n(P_i)$。又因 $n(P_i) \geqslant 1$,$(i = 1,2,\cdots,n)$,从而 $n(G) \geqslant n = |\pi(G)|$。

定理 3 若非循环群 G 的极小子群同时也是极大子群,则 $n(G) \geqslant |\pi(G)| + p$,$p$ 为群 G 的最小素因子。

证明 此时有 $n(G) = |m(G)|$,由引理 4 即得证。

推论 1 存在着有限群 G,使得该群的极小子群数 $n(G) = |\pi(G)| + p_i$,其中 p_i 为群 G 的素因子,$\pi(G) = \{p_1, p_{2,\cdots,} p_n\}$,$1 \leqslant i \leqslant n$。

证明 考虑

$$G = Z_{p_1} \times Z_{p_2} \times \cdots \times Z_{p_{i-1}} \times Z_{p_i} \times Z_{p_i} \times Z_{p_{i+1}} \times \cdots \times Z_{p_n}$$

而 p_i^2 阶初等交换群的极小子群与极大子群相同,从而由引理 5 有 $Z_{p_i} \times Z_{p_i}$ 的极小子群数为 $p_i + 1$,又 $n(Z_{p_j}) = 1$,$(1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i)$,则 $n(G) = |\pi(G)| - 1 + (p_i + 1) = |\pi(G)| + p_i$。

定理 4 初等交换 $p-$群的极小子群数与极大子群数相等。

证明 令 $|G| = p^n$,则 G 中 p^m 阶子群数 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p =$

$$\begin{cases} \dfrac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\cdots(p^{n-m+1} - 1)}{(p^m - 1)(p^{m-1} - 1)\cdots(p - 1)}, m > 0 \\ 1, m = 0 \end{cases}$$

从而有 $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_p = \dfrac{p^n - 1}{p - 1}$,即 $n(G) = |m(G)|$ 证毕。

3　结束语

对于特定的有限群,本文对其极小子群数与素因子数之间的关系进行了探讨,得到了相关的结论,为其在量子物理、信息等方面的应用发展奠定了较好的理论基础,但是对于一般的有限群,其极小子群数与素因子数的关系还有待进一步研究。

参 考 文 献:

[1] 黄彦华.极小子群个数为 3,4 的有限群[J].内江师范学院学报,2010,25(4):12-13.

[2] Lauderdale L K.Lower bounds on the number of maximal subgroups in a finite group[J]. Arch. Math,2013(101):9-15.

[3] 沈如林,史江涛,施武杰.极小子群与有限群的结构研究[J].苏州大学学报:自然科学版,2009,25(1):1-3.

[4] 黎先华.极大子群同阶类类数 =3 的有限群[J].数学学报,1994(1):108-115.

[5] 王立中.极大子群个数 <5 的有限群[J].首都师范大学学报,2000,21(3):10-13.

[6] 游兴中,朱伟华,刘 峥.恰有 6 个极大子群的有限群[J].吉首大学学报,2011,32(3):1-3.

[7] 游兴中,朱伟华,刘 峥.恰有 7 个极大子群的有限群[J].吉首大学学报,2011,32(5):1-3.

[8] Al-Mosa M M,Heliel A.Finite groups Whose Minimal Subgroups are WeaklyH- Subgroups[J].Acta Mathematica Scientia,2012(32):2295-2301.

[9] Gabriel N,Pham H T.Abelian Sylow Subgroups in a finite group[J].Journal of Algebra,2014(398):519-526.

[10] 丁士锋.有限群在某个极小子群共轭类上的传递性[J].浙江大学学报:理学版,2004,31(1):7-10.

[11] Zvonimir J.Finite p-groups with many minimal nonabelian subgroups[J].Journal of Algebra,2012(357):263-270.

[12] 徐明曜.有限群导引[M].北京:科学出版社,1999.

[13] 张远达.有限群构造[M].北京:科学出版社,1982.

[14] Sophie F,Daniel K.Sylow p-groups of polynomial permutations on the inters mod p^n [J].Journal of Number Theory,2013(133):4188-4199.

The Numbers of Minimum Subgroups and Prime Factors of Finite Group

HUANG Yanhua[a], *WANG Lei*[b]

(a. School of Science b. School of Architecture and Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Minimum subgroup is a kind of special subgroup and plays a important role in the study of finite group structure. The number and properties of minimum subgroup of finite group can reflect many properties of this group. From the perspective of minimum subgroup, the finite groups with different properties are discussed, and then the relation of minimum subgroups number and prime factors number is obtained.

Key words: minimum subgroup; nilpotent; cyclic subgroup; prime factor