文章编号:1673-1549(2014)06-0075-05　　DOI:10.11863/j.suse.2014.06.19

Poisson 方程三类问题的通解

郭时光[1,2]

(1. 四川理工学院理学院, 四川　自贡　643000;2. 人工智能四川省重点实验室, 四川　自贡　643000)

摘　要: 研究二维到四维空间上 Poisson 方程。采用求出其通解的方法,分别给出了该方程 Cauchy 问题、Direchlet 问题和 Neunmann 问题的通解的解析表达式,从而得出其后面两类问题均存在无限多个解的结论。

关键词: Poisson 方程;Direchlet 问题;Neunmann 问题;推迟势;正规解;降维法

中图分类号: O175.13　　**文献标志码:** A

对于半空间上 Poisson 方程 Direchlet 问题[1-2],如果应用 Poisson 公式[3-4]求解,一方面,很难判断所得解[5-11]是否正规,另一方面,当定解区域是半空间时,就缺乏合理性,并且导致所得解不全等谬误。作为改善,需要重新分析这个问题。

1　二维 Poisson 方程 Cauchy 问题

1.1　二维 Poisson 方程的通解

考察二维空间 Poisson 方程:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)\ (-\infty < x,y < +\infty) \tag{1}$$

做变换 $\xi = x - jy, \eta = x + jy$, 得

$$u_{\xi\eta} = F(\xi,\eta) \tag{2}$$

其中, $F(\xi,\eta) = f(x,y)$。将 η 视为常数,方程(2) 关于 ξ 从 ξ 到 η 积分,得

$$u_\eta = -\int_\xi^\eta F(\alpha,\eta)\,\mathrm{d}\alpha + g_1(\eta) \tag{3}$$

将 ξ 视为常数,方程(3) 关于 η 从 ξ 到 η 积分,得

$$u = -\int_\xi^\eta \Big[\int_\xi^\beta F(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\Big]\,\mathrm{d}\beta + g(\eta) + h(\xi)$$

其中, g_1 是可积函数, h_1 是可微函数,而

$$\int_0^\eta g_1(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = g(\eta)$$

$$\int_\xi^0 g_1(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + h_1(\xi) = h(\xi)$$

将原自变数代回上式,得解

$$u = u(x,y) = \frac{1}{2j}\int_0^y \Big[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\Big]\,\mathrm{d}\tau + g(x+jy) + h(x-jy) \tag{4}$$

式(4)即是二维 Poisson 方程(1)的通解公式。

1.2　二维推迟势公式

设一维齐次 Cauchy 条件

$$u|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0\ (-\infty < x < +\infty) \tag{5}$$

考察由方程(1)与条件(5)组成的 Cauchy 问题。将通解式(4)用条件(5)计算,分别得

$$g(x) + h(x) = 0$$

$$g'(x) - h'(x) = 0 \Rightarrow g(x) - h(x) = c$$

由此解得 $g(x) = -h(x) = \frac{1}{2}c$, 用于式(5),得解

$$u = u(x,y) = \frac{1}{2j}\int_0^y \Big[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\Big]\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

其中,积分路径为直线段。解的这个表达式称为二维推迟势公式。

定理 1　对于由方程(1)与条件(5)组成的 Cauchy 问题,如果函数 f 具有连续的各个偏导数,则函数(6)是

收稿日期:2014-05-27

基金项目:人工智能四川省重点实验室开放基金项目(2012RYY04)

作者简介:郭时光(1955-),男,重庆荣昌人,副教授,主要从事数学物理方程方面的研究,(E-mail)youare20002000@qq.com

该问题的正规解。

证 将式(6)的函数 $u=u(x,y)$ 分别代入该问题中的各个项计算,得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\right]\mathrm{d}\tau\right\}+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\right]\mathrm{d}\tau\right\}=$$

$$\frac{1}{2j}\int_0^y\{f_1[x+j(y-\tau),\tau]-$$

$$f_1[x-j(y-\tau),\tau]\}\,\mathrm{d}\tau+f(x,y)-$$

$$\frac{1}{2j}\int_0^y\{f_1[x+j(y-\tau),\tau]-f_1[x-j(y-\tau),\tau]\}$$

$$\mathrm{d}\tau=f(x,y)$$

$$\left\{\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\right]\mathrm{d}\tau\right\}\bigg|_{y=0}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)} f(\chi,\tau)\,\mathrm{d}\chi\right]\mathrm{d}\tau\right\}\bigg|_{y=0}=0$$

由此可知,式(6)中的函数 $u=u(x,y)$ 是所述问题的正规解。证毕。

二维 Laplace 方程非齐次条件 Cauchy 问题的一般形式为:

$$\left.\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0(-\infty<x,y<+\infty)\\&u|_{y=0}=\mu(x),u_y|_{y=0}=\psi(x)(-\infty<x<+\infty)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

为了求解,采用将 Cauchy 条件齐次化法。在问题(7)中,令

$$u=v+\mu(x)+y\psi(x)\tag{8}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&v_{xx}+v_{yy}=-\mu''(x)-y\psi''(x)(-\infty<x,y<+\infty)\\&v|_{y=0}=0,v_y|_{y=0}=0(-\infty<x<+\infty)\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

用二维推迟势公式可求得问题(9)的解。将这个解代入式(8),化简得

$$u=u(x,y)=\frac{1}{2}[\mu(x+jy)+\mu(x-jy)]+$$

$$\frac{1}{2j}\int_{x-jy}^{x+jy}\psi(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon\tag{10}$$

验证即知,有:

定理 2 在问题(7)中,如果函数 $\mu(x)$ 与 $\psi(x)$ 均具有二阶导数,则表达式为式(10)的解是该问题的正规解。

1.3 非齐次 Cauchy 问题

设非齐次条件 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}&w_{xx}+w_{yy}=f(x,y)(-\infty<x,y<+\infty)\\&w|_{y=0}=\mu(x),w_y|_{y=0}=\psi(x)(-\infty<x<+\infty)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

用叠加原理,由定理 1 与定理 2,可得:

定理 3 如果函数 f 具有连续的各个偏导数,函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个二阶偏导数,则该问题存在正规解,其表达式为:

$$w=w(x,y)=$$

$$\frac{1}{2}[\mu(x+jy)+\mu(x-jy)]+\frac{1}{2j}\int_{x-jy}^{x+jy}\psi(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon+$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\tag{12}$$

例 1 求二维 Laplace 方程 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 在全平面上的所有解。

解 用式(4),得方程 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 的复数通解

$$v=g(x+jy)+h(x-jy)\tag{13}$$

由此可见,该方程的实通解可以表示为:

$$v=\frac{1}{2}[g(x+jy)+g(x-jy)]\tag{14}$$

其中,g,h 均为可连续微分二次的任意函数。

例 2 求解上半平面 Poisson 方程 Direchlet 问题

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y);u|_{y=0}=\mu(x)\tag{15}$$

解 用公式(12),得问题的一个解为:

$$u=u_0(x,y)=\frac{1}{2}[\mu(x+jy)+\mu(x-jy)]+$$

$$\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\tag{16}$$

设 v 的是问题(15)对应齐次定解问题的解,即

$$v_{xx}+v_{yy}=0;\ \mathrm{v}|_{y=0}=0$$

用泛定方程的通解式(14)代入,得

$$v=v(x,y)=\frac{j}{2}[h(x-jy)-h(x+jy)]\tag{17}$$

其中,h 为可连续微分二次的任意函数。根据叠加原理,得问题(15)的通解为:

$$u=u_0(x,y)+v(x,y)$$

其中,$u_0(x,y),v(x,y)$ 分别为式(16)与(17)所示。

例 3 求解上半平面 Poisson 方程 Neumann 问题

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y);u_y|_{y=0}=\psi(x)\tag{18}$$

解 用公式(12),得问题的一个解为:

$$u=u_0(x,y)=\frac{1}{2j}\int_{x-jy}^{x+jy}\psi(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon+$$

$$\frac{1}{2j}\int_0^y\left[\int_{x-j(y-\tau)}^{x+j(y-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\tag{19}$$

设 v 是问题(18)所对应全齐次定解问题的解,即

$$v_{xx}+v_{yy}=0;v_y|_{y=0}=0$$

用式(14)代入,得

$$v=v(x,y)=\frac{1}{2}[g(x+jy)+g(x-jy)] \tag{20}$$

其中,g 为可连续微分二次的任意函数。根据叠加原理,得问题(18)的通解为:

$$u=u_0(x,y)+v(x,y)$$

其中,$u_0(x,y)$,$v(x,y)$ 分别为式(19)与(20)所示。

2　四维 Poisson 方程 Cauchy 问题

2.1　四维推迟势公式

设四维无限区域 Poisson 方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+u_{ww}=f(x,y,z,w) \tag{21}$$

采用球面平均值法。函数 $u=u(x,y,z,w)$ 在点(x,y,z)处半径 r 的球面平均值记为 $\bar{u}(x,y,z,w;r)$,即

$$\bar{u}(x,y,z,w;r)=\frac{1}{4\pi r^2}\times$$

$$\oiint\limits_{(x_r-x)^2+(y_r-y)^2+(z_r-z)^2=r^2} u(x_r,y_r,z_r,w)\mathrm{d}\sigma \tag{22}$$

易知,如果 $u=u(x,y,z,w)$ 连续,则有

$$u(x,y,z,w)=\bar{u}(x,y,z,w;0)=$$

$$\lim_{r\to 0}\bar{u}(x,y,z,w;r) \tag{23}$$

球半径还可以扩展到负数,且有

$$\bar{u}(x,y,z,w;r)=\bar{u}(x,y,z,w;-r) \tag{24}$$

将球面平均值中的积分用球面坐标表示,得

$$\bar{u}(x,y,z,w;r)=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}u(x_r,y_r,z_r,w)\mathrm{d}\theta\right]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{25}$$

其中,

$$x_r=x+r\cos\theta\sin\varphi$$

$$y_r=y+r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z_r=z+r\cos\varphi$$

设函数 $u=u(x,y,z,w)$ 是方程(21)的解。用函数 $u(x_r,y_r,z_r,w)$ 关于 θ 的周期性,得

$$\frac{a^2}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right.$$

$$\left.u(x_r,y_r,z_r,w)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{a^2}{4\pi r^2}\left\{\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\left[\frac{\partial u(x_r,y_r,z_r,w)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}\varphi+\right.$$

$$\left.\int_0^{2\pi}\left[\sin\varphi\frac{\partial u(x_r,y_r,z_r,w)}{\partial\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\mathrm{d}\theta\right\}=0$$

将方程(21)两边均取在点(x,y,z)处半径 r 的球面平均值,其中积分与算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 均用球面坐标表示,并利用上式,交换微积分次序,得

$$\bar{f}(x,y,z,w;r)=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}f(x_r,y_r,z_r,w)\mathrm{d}\theta\right]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right.$$

$$\left.u(x_r,y_r,z_r,w)\sin\varphi\mathrm{d}\theta\right\}\mathrm{d}\varphi=$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\bar{u}(x,y,z,w;r)$$

将上式两边同乘以 r,得

$$\frac{\partial^2[r\bar{u}(x,y,z,w;r)]}{\partial w^2}+\frac{\partial^2[r\bar{u}(x,y,z,w;r)]}{\partial r^2}=$$

$$r\bar{f}(x,y,z,w;r) \tag{26}$$

引入三维齐次 Cauchy 条件

$$u|_{w=0}=0,u_w|_{w=0}=0(-\infty<x,y,z<+\infty) \tag{27}$$

则其球面平均值满足

$$[ru(x,y,z,w;r)]|_{w=0}=0$$

$$[ru(x,y,z,w;r)]_w|_{w=0}=0 \tag{28}$$

考察由方程(25)与条件(27)组成的 Cauchy 问题。用二维推迟势公式,得其解

$$\bar{u}(x,y,z,w;r)=\frac{1}{2jr}\int_0^w\left[\int_{r-j(w-\tau)}^{r+j(w-\tau)}\chi\bar{f}(x,y,z,,\tau;\chi)\mathrm{d}\chi\right]\mathrm{d}\tau \tag{29}$$

令 $r\to 0$,式(28)左边用式(22),右边用 L′Hospital 法则,交换极限与积分次序,得

$$u(x,y,z,w)=\int_0^w(w-\tau)\bar{f}[x,y,z,w;j(w-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

将 f 的球面平均值积分表达式代入,并使用球面坐标,化为重积分,即可得

$$u=u(x,y,z,w)=\frac{1}{4\pi}\int_0^w\tau d\tau\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}f$$

$$(x+j\tau\cos\theta\sin\varphi,y+j\tau\sin\theta\sin\varphi,z+j\tau\cos\varphi,w-\tau)\mathrm{d}\theta \tag{30}$$

式(29)就是方程(21)与条件(26)所组成 Cauchy 问题解的表达式,称为四维推迟势公式。验证即知,有:

定理 4　方程(21)与条件(26)组成的 Cauchy 问题中,如果函数 f 具有连续的各个二阶偏导数,则函数

(29)是该问题的正规解。

2.2 四维 Kirchhoff 公式

设有四维空间 Laplace 方程的 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+u_{ww}=0\\&u\big|_{w=0}=\mu(x,y,z),u_w\big|_{w=0}=\psi(x,y,z)\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

采用将 Cauchy 条件齐次化法,然后利用四维推迟势公式计算,得其解

$$\begin{aligned}&u=u(x,y,z,w)=\\&\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{\partial}{\partial w}[w\mu(x+jw\cos\theta\sin\varphi,y+\\&jw\sin\theta\sin\varphi,z+jw\cos\varphi)]+\\&w\psi(x+jw\cos\theta\sin\varphi,y+jw\sin\theta\sin\varphi,z+\\&jw\cos\varphi)\Big\}\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{32}$$

验证即知,有:

定理 5 在问题(30)中,如果函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个三阶偏导数,则函数(31)是该问题的正规解。

2.3 四维 Cauchy 问题

设四维 Cauchy 条件

$$u\big|_{w=0}=\mu(x,y,z),u_w\big|_{w=0}=\psi(x,y,z)\tag{33}$$

根据定理 4 和定理 5,用叠加原理,得

定理 6 方程(21)与条件(32)组成的 Cauchy 问题中,如果函数 f 具有连续的各个二偏导数,函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个三阶偏导数,则该问题存在正规解,其表达式为式(29)与式(32)的两个函数之和。

3 三维 Poisson 方程 Cauchy 问题

3.1 三维推迟势公式

考察三维空间 Poisson 方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z)(-\infty<x,y,z<+\infty)\tag{34}$$

设三维齐次 Cauchy 条件为:

$$u\big|_{z=0}=0,u_z\big|_{z=0}=0(-\infty<x,y<+\infty)\tag{35}$$

用 Hadamard 降维法。去掉四维推迟势公式中关于变量 z 的因素,然后换 $w\to z$, 并将积分作代换 $\sin\varphi=\rho$,这样就能得到方程(33)与条件(34)组成的 Cauchy 问题解的表达式

$$\begin{aligned}&u=u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^z\tau\mathrm{d}\tau\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}f\\&(x+j\tau\rho\cos\theta,y+j\tau\rho\sin\theta,z-\tau)\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{36}$$

表达式(35)称为三维推迟势公式。验证即知,有:

定理 7 方程(33)与条件(34)组成的 Cauchy 问题中,如果函数 f 具有连续的各个二阶偏导数,则函数(35)是该问题的正规解。

3.2 三维 Poisson 公式

设三维空间 Laplace 方程 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0(-\infty<x,y,z<+\infty)\\&u\big|_{z=0}=\mu(x,y),u_z\big|_{z=0}=\psi(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

采用将 Cauchy 条件齐次化方法,用推迟式公式,得其解

$$\begin{aligned}&u=u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\\&\Big\{\frac{\partial}{\partial z}[z\mu(x+jz\rho\cos\theta,y+jz\rho\sin\theta)]+\\&z\psi(x+jz\rho\cos\theta,y+jz\rho\sin\theta)\Big\}\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{38}$$

验证即知,有:

定理 8 在问题(36)中,如果函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个三阶偏导数,则表达式为式(37)的解是该问题的正规解。

3.3 三维 Cauchy 问题

设三维非齐次 Cauchy 条件

$$u\big|_{z=0}=\mu(x,y),u_z\big|_{z=0}=\psi(x,y)\tag{39}$$

根据定理 7 和定理 8,用叠加原理,可得:

定理 9 方程(33)与条件(38)组成的 Cauchy 问题中,如果函数 f 具有连续的各个二偏导数,函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个三阶偏导数,则该问题存在正规解,其表达式为式(35)与式(37)的两个函数之和。

由方程(33)与条件(38)组成的 Cauchy 问题中,如果去掉条件项 $u_z\big|_{z=0}=\psi(x,y)$,则问题变为 Direchlet 问题,其通解仍然如定理 3 所述,但是其中 ψ 则为任意函数;如果去掉条件项 $u\big|_{z=0}=\mu(x,y)$,则问题变为 Neumann 问题,其通解仍然如定理 3 所述,但是其中 μ 则为任意函数。

4 结束语

如果函数 f 具有连续的各个二偏导数,函数 μ 与 ψ 均具有连续的各个三阶偏导数,则验证可知,这样所得的解是正规解。

由此可见,Poisson 方程 Direchlet 问题和 Neumann 问题若存在解,则其解均为无穷多。

参 考 文 献:

[1] 李明奇,覃思义.平面中 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

[J].大学数学,2009,25(4):146-150.

[2] 黄永水.随机 Poisson 方程 Dirichlet 大地边值问题的随机积分解[J].武汉大学学报:信息科学版,2005,30(10):33-38.

[3] 柳志千,黄端山.Poisson 方程 Dirichlet 问题的解在角点附近的性质[J].韶关学院学报:自然科学版,2005(3):23-27.

[4] 复旦大学数学教研室.数学物理方程[M].上海:复旦大学出版社,2001.

[5] 钱伟长.格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用[M].上海:上海大学出版社,2000.

[6] 王元明.数学物理方程与特殊函数[M].4 版.北京:高等教育出版社,2012.

[7] 沈婷婷,马和平.二维 Poisson 方程的 Legendre Tau 方法的误差估计[J].上海大学学报:自然科学版,2011,17(3):33-38.

[8] Li Guozhen. The existence theorems of the random solutions for random Hammerstein equation with random kernel[J]. applied mathematics letters,2002,15(1):103-105.

[9] Zhu Chuanxi, Chen Chunfang Calculations of random fixed point index[J]. Jaurmal of mathematical analysis and applications,2008,339(2):839-844.

[10] 周 敏,高 挺,陈艳霞.基于 BP 神经网络的液压缸市场价格估算模型[J].中国科技论文在线,2014,7(10):1010-1014.

[11] 冯雪飞,丁日佳.基于人工神经网络的单因素特种设备事故预测[J].中国科技论文在线,2014,7(10):1002-1009.

General Solution of Three Problems for Poisson Equation

GUO Shiguang[1,2]

(1. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;

2. Artificial Intelligence of Key Laboratory of Sichuan Province, Zigong 643000, China)

Abstract: Researching the Poisson equations on 2 d to 4 d spaces. Through the method of finding out their general solutions, the analytic expressions of the general solutions of Cauchy problem, Direchlet problem and Neunmann problem for the equation are given respectively. Thus the conclusion that there are an unlimited number of solutions for the two behind types of problems is obtained.

Key words: Poisson equation; Direchlet problem; Neunmann problem; Retarded potential; Formal solution; Dimension reduction method