文章编号:1673-1549(2014)06-0072-03 DOI:10.11863/j.suse.2014.06.18

随机函数乘积的几乎处处中心极限定理

邹广玉

(长春工程学院理学院, 长春 130012)

摘 要: 利用 ρ - 混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理,给出了一类随机函数(统计量)乘积的几乎处处中心极限定理,推广了独立情形的结论。

关键词: 随机函数; ρ - 混合序列; 几乎处处中心极限定理

中图分类号: O211.4 **文献标志码:** A

引 言

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是随机变量序列,其部分和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 设 $T_n = T_n(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是一个随机函数或统计量,可以表示成 $T_n = a_n S_n + R_n$, 其中 $a_n > 0$ 是常数列, R_n 称为余项。很多随机函数(或统计量)都可表示成这种形式,例如 U 统计量、平均移动过程、线性模型的误差方差估计量和 Von - Mises 统计量等。

针对此类随机函数,众多学者对其极限性质进行了研究。文献[1]得到了随机函数的几乎处处中心极限定理,文献[2]得到了随机函数大数定律和重对数律的精确渐近性质,文献[3 - 4]分别讨论了 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布和 NA 序列时随机函数乘积的几乎处处中心极限定理,本文讨论 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 ρ - 混合序列时随机函数乘积的几乎处处中心极限定理。

定义 1 记 $\mathfrak{F}_a^b = \sigma(X_t, a \leq t \leq b)$, 如果

$$\rho(n) = \sup_k \sup_{X \in L_2(\mathfrak{F}_1^k), Y \in L_2(\mathfrak{F}_{k+n}^\infty)} \frac{|EXY - EXEY|}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}} \to 0, n \to \infty$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ρ - 混合的。

ρ - 混合序列的概念由 Kolmogrov 和 Rozanov 在文献[5]中引入。本文的主要结论如下:

定理 1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是正的严平稳的 ρ - 混合随机变量列,满足 $EX_1 = \mu > 0$ 和 $VarX_1 = \sigma^2 < \infty$, 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_n = a_n S_n + R_n$, 其中 a_n 是正常数列,变异系数 $\gamma = \sigma/\mu$, 假设下列条件成立

(H1) 对某个 $\varepsilon > 2$, $\rho(n) = O(n^{-1}(\log n)^{-\varepsilon})$

(H2) $\sigma_1^2 = 1 + \frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=2}^{\infty} Cov(X_1, X_j) > 0$

(H3) $R_n = o(a_n\sqrt{n})\ a.s.$

那么对任意的 x,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{T_i}{a_i \mu i}\right)^{1/(\gamma\sigma_1\sqrt{k})} \leq x\right\} = F(x), a.s. \tag{1}$$

其中, $F(x)$ 表示随机变量 $e^{\sqrt{2}N}$ 的分布函数。下同。

1 主要引理

在本文中,当 $k \leq n$ 时,记 $b_{kn} = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$; 当 $k > n$ 时,

---

收稿日期: 2014-08-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(11401090);吉林省教育厅重点项目(120120113);长春工程学院青年基金项目(320130019)

作者简介: 邹广玉(1982-),男,吉林通化人,讲师,博士,主要从事概率极限理论方面的研究,(E-mail)jingyang999@126.com

$b_{kn}=0$。令 $Y_k=(X_k-\mu)/\sigma$, $S_{n,n}=\sum_{k=1}^{n}b_{kn}Y_k$, C 在不同位置表示不同的常数。

引理 1　设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是正的严平稳的 ρ - 混合随机变量列,满足 $EX_1=\mu>0$ 和 $VarX_1=\sigma^2<\infty$,假设

(H1)对某个 $\varepsilon>2$, $\rho(n)=O(n^{-1}(\log n)^{-\varepsilon})$

(H2) $\sigma_1^2=1+\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=2}^{\infty}Cov(X_1,X_j)>0$

那么对任意的 x,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\frac{S_{k,k}}{\sigma_1\sqrt{2k}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),a.s. \tag{2}$$

其中, $\Phi(x)$ 表示服从标准正态分布随机变量的分布函数。下同。

证明见文献[6]引理 2.5。

引理 2　在定理 1 的条件下,对任意的 x,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)\leqslant x\right\}=\Phi(x),a.s. \tag{3}$$

证明

$$\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)=\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{S_i}{\mu i}-1\right)+\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i}{a_i\mu i}:=A_1+A_2$$

注意到

$$A_1=\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{S_i}{\mu i}-1\right)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}b_{ik}Y_i=\frac{S_{k,k}}{\sigma_1\sqrt{2k}}$$

由(2)式,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{A_1\leqslant x\}=\Phi(x)a.s. \tag{4}$$

又注意到 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}\sim\sqrt{k}$(即有常数 K_1,K_2,使得

$$K_1\sqrt{k}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}\leqslant K_2\sqrt{k})$$

故

$$A_2=\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i}{a_i\mu i}=\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\frac{o(a_i\sqrt{i})}{a_i\mu i}=\frac{1}{\sqrt{k}}o\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}\right)=o(1)a.s.$$

于是,对任意小的 $\varepsilon>0$ 和几乎所有的样本点 ω,存在正整数 $N_1=N_1(\omega,\varepsilon,x)$,使得当 $k>N_1$ 时有

$$I(A_1\leqslant x-\varepsilon)\leqslant I\left(\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)\leqslant x\right)\leqslant I(A_1\leqslant x+\varepsilon)$$

由(4)式可知(3)式成立,于是证明了引理 2。

引理 3　设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布的 ρ - 混合随机变量列,满足 $EX_1=0$ 和 $E|X_1|^p<\infty$, $1\leqslant p<2$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(2^n)<\infty$,则 $S_n/n^{1/p}\to 0,a.s$,当 $n\to\infty$ 时。

证明见文献[6]引理 2.2。

2　定理 1 的证明

易知(1)式等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{T_i}{a_i\mu i}\leqslant x\right\}=\Phi(x),a.s. \tag{5}$$

对某个 $\frac{4}{3}<p<2$,由引理 3 知,对于充分大的 i,有

$$\left|\frac{S_i}{\mu i}-1\right|\leqslant Ci^{\frac{1}{p}-1}$$

又由定理 1 条件(H3)知,

$$\frac{R_i}{a_i\mu i^{\frac{1}{p}}}\to 0,i\to\infty$$

于是,对于充分大的 i,有

$$\left|\frac{\frac{T_i}{a_i\mu i}-1}{i^{\frac{1}{p}-1}}\right|=\left|\frac{\frac{S_i}{\mu i}-1}{i^{\frac{1}{p}-1}}+\frac{R_i}{a_i\mu i^{\frac{1}{p}}}\right|\leqslant C$$

注意到当 $|x|<1$ 时, $\log(1+x)=x-Q(x)$,且 $\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$,故有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\log\frac{T_i}{a_i\mu i}-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)\right|\leqslant C\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)^2\leqslant C\sum_{i=1}^{k}i^{\frac{2}{p}-2}\leqslant Ck^{\frac{2}{p}-1}$$

于是,对任意小的 $\varepsilon>0$ 和几乎所有的样本点 ω,存在正整数 $N_2=N_2(\omega,\varepsilon,x)$,使得当 $k>N_2$ 时有

$$I\left(\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)\leqslant x-\varepsilon\right)\leqslant$$

$$I\left(\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{T_i}{a_i\mu i}\leqslant x\right)\leqslant$$

$$I\left(\frac{1}{\gamma\sigma_1\sqrt{2k}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{a_i\mu i}-1\right)\leqslant x+\varepsilon\right)$$

由(3)式即知(5)式成立,即证明了定理 1。

参 考 文 献:

[1] 陆传荣,邱 瑾,徐建军.随机函数的几乎处处中心极限定理[J].中国科学:A 辑,2006,36(9):1045-1056.

[2] 周君兴,杨辉煌,陆传荣.一类统计量的强大数定律和重对数律的精确渐近性质[J].数学年刊,2006,27A(6):807-814.

[3] 邱 瑾,陆传荣.一类统计量的乘积的渐近性质和几乎处处中心极限定理[J].数学物理学报,2013,33(3):475-482.

[4] 邹广玉.一类统计量乘积的几乎处处中心极限定理[J].长春工程学院学报:自然科学版,2014,15(1):126-128.

[5] Kolmogrov A N,Rozanov U A.On the strong mixing conditions of a stationary Gaussian process[J].Probab. Theory Appl.,1960(2):222-227.

[6] 金敬森,王建峰,张立新.ρ-混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理[J].数学学报,2007,50(4):729-736.

An Almost Sure Central Limit Theorem for the Product of Random Functions

ZOU Guangyu

(School of Science, Changchun Institute of Technology, Changchun 130012, China)

Abstract: Applying the almost sure central limit theorem for the product of partial sums of ρ- mixing sequences, an almost sure central limit theorem for the product of a class of random functions(or statistics) was obtained, which extended the result of the i. i. d case.

Key words: random functions; ρ- mixing sequences; almost sure central limit theorem