第 27 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 5
2014 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2014
文章编号:1673-1549(2014)05-0093-03　　DOI:10.11863/j. suse. 2014. 05. 21

弱链对角占优 M-矩阵 A 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界估计式

刘　新, 杨晓英

(四川信息职业技术学院基础教育部, 四川　广元　628017)

摘　要:针对弱链对角占优 M- 矩阵 A, 利用逆矩阵元素的估计范围,给出 $\|A^{-1}\|_\infty$ 新的上界估计式。通过算例分析表明新的上界估计式改进了现有的一些结果。

关键词:弱链对角占优;M - 矩阵;无穷大范数;上界

中图分类号:O151. 21　　**文献标志码**:A

弱链对角占优矩阵是一类有着广泛应用背景的重要矩阵。其中,弱链对角占优 M- 矩阵 A 的逆矩阵无穷大范数 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界可以应用于判定 l_1 - 范数与加权 perron 范数的上下界,求解线性微分系统 $\dot{x} = -Ax, x(0) = x_0 > 0$ 的解 $x(t)$,解决大型稀疏线性方程组的矩阵分裂和矩阵多分裂迭代方法的收敛性等众多应用领域[1-7]。所以,关于 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计成为许多学者关注和研究的热点,已获得了一系列估计式[1-5]。本文将在黎稳[2]和黄廷祝[3]等人的研究基础上,充分结合两人研究方法的优点,进而得到 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界的新估计式,新估计式改进了现有的结果。

1　预备知识

设 $R^{n\times n}$ 表示 $n \times n$ 阶实矩阵的集合, N 表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$。

定义 1　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 若 A 可以表示为 $A = \lambda I - B$, 其中 $B \geqslant 0$, 当 $\lambda > \rho(B)$ ($\rho(B)$ 为非负矩阵 B 的谱半径)时,则称 A 为非奇异 M- 矩阵[8-9]。

定义 2　设矩阵 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 且满足条件:

(1) $|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i \in N$

(2) $J(A) = \{i \in N : |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\} \neq \phi$

(3)对 $\forall i \in N, i \notin J(A)$, 存在非零元素序列 $a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_rk}$, 其中 $i \neq i_1, i_1 \neq i_2, \cdots, i_r \neq k, k \in J(A)$, 则称 A 为弱链对角占优矩阵。若 $J(A) = N$, 则称矩阵 A 为严格对角占优矩阵。

记 $[A]$ 表示矩阵 A 的比较矩阵,其中 $[A] = (\tilde{a}_{ij})$,

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & i \neq j \end{cases}$$

给出一些记号,它们将在后面的讨论中用到。记:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

$$u_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$b_k = \max\left\{ \frac{\sum_{j\neq i+k, k\leqslant j\leqslant n} |a_{i+k,j}|}{|a_{i+k,i+k}|}, i = 1, \cdots, n-k \right\}, k = 1, \cdots, n$$

$$p_k = \max\left\{ \frac{|a_{i+k,k}| + \sum_{h=k+1, h\neq i+k}^{n} |a_{i+k,h}| b_k}{|a_{i+k,i+k}|} \right.$$

$$\left. i = 1, \cdots, n-k \right\}, k = 1, \cdots, n$$

$$s_n^m(A^{(n-m)}) = \sum_{i=n-m+1}^{n-1} |a_{n,i}|, m = n, \cdots, 1$$

其中

$$s_k^m(A^{(n-m)}) = \sum_{i=n-m+1}^{k-1} |a_{ki}| + \sum_{i=k+1}^{n} |a_{ki}| \frac{s_i^m(A^{(n-m)})}{|a_{ii}|}$$

$$A^{(0)} = A; k = n-1, \cdots, n-m+1$$

关于弱链对角占优 M- 矩阵的逆矩阵无穷大范数的上界,Shivakumar 等在文献[1]中给出:

收稿日期:2014-03-04

基金项目:四川省教育厅自然科学基金项目(13ZB0393)

作者简介:刘　新(1983-),男,山东济宁人,讲师,硕士,主要从事矩阵理论与应用方面的研究,(E-mail)liuxin01668@163.com

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[a_{ii}\prod\nolimits_{j=1}^{i}(1-u_j)\right]^{-1} \tag{1}$$

在文献[2]中 Li 给出:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\frac{h_k}{a_{kk}(1+l_k)-s_k(A)} \tag{2}$$

Huang 与 Zhu[3] 改进了 Li 的结果,得出:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{a_{11}(1-u_1p_1)}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod\nolimits_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right],\frac{p_1}{a_{11}(1-u_1p_1)}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\left[\frac{p_i}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod\nolimits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jp_j}\right]\right\} \tag{3}$$

上述结果均可用于估计弱链对角占优 M- 矩阵最小特征值的下界和矩阵的条件数。

2 弱链对角占优 M- 矩阵的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 上界

引理 1[3] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优矩阵, $A^{-1}=(\alpha_{ij})$, 则

$$|\alpha_{i1}|\leqslant\frac{|a_{i1}|+\sum_{k\neq i,1}|a_{ik}|\rho_k}{|a_{ii}|}|\alpha_{11}|\leqslant p_1|\alpha_{11}|\leqslant|\alpha_{11}|,i\neq 1 \tag{4}$$

引理 2[2] 设 $[A]$ 是非奇异对角占优 M − 矩阵, $A^{-1}=(\alpha_{ij})$, 则

$$\frac{1}{|a_{11}|+s_1(A)}\leqslant|\alpha_{11}|\leqslant\frac{1}{|a_{11}|-s_1(A)}$$

设非空指标集合 $\beta^{(k)}\subseteq N$, 定义 $A[\beta^{(k)}]$ 表示取自矩阵 A, 行列数是 $\beta^{(k)}$ 的子矩阵。定义 $A^{(k)}=A[\alpha^{(k)}]$, 其中 $\alpha^{(k)}=\{k+1,\cdots,n\}$; 例如 $A^{(1)}$ 表示删除 A 的第一行第一列的子矩阵。

引理 3[1] 设 A 是 $n\times n$ 阶弱链对角占优 M − 矩阵, 则 $B=A^{(1)}$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 阶弱链对角占优 M − 矩阵(即 $B^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,且 $\beta_{ij}\geqslant 0,i,j=2,3,\cdots,n$)。

引理 4[1] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M − 矩阵, $B=A^{(1)},A^{-1}=(\alpha_{ij}),B^{-1}=(\beta_{ij})$, 则

$$\alpha_{i1}=\alpha_{11}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}) \tag{5}$$

$$\alpha_{1j}=\alpha_{11}\sum_{k=2}^{n}\beta_{kj}(-a_{1k}) \tag{6}$$

$$\alpha_{ij}=\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1}) \tag{7}$$

定理 1 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M- 矩阵, $B=A^{(1)},A^{-1}=(\alpha_{ij})_{n\times n},B^{-1}=(\beta_{ij})_{(n-1)\times(n-1)},\rho_1p_1<1$, 则

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max\left\{\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}\rho_1\|B^{-1}\|_\infty}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})},\frac{p_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}(1+\rho_1p_1)-s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\|B^{-1}\|_\infty\right\}$$

证明 令

$$r_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}=\alpha_{ii}+\sum_{k\neq i}\alpha_{ik},i=1,\cdots,n$$

$$M_1=\|A^{-1}\|_\infty,M_2=\|B^{-1}\|_\infty$$

则

$$M_1=\max\{r_i,1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$M_2=\max\{\sum\nolimits_{k=2}^{n}\beta_{ik},2\leqslant i\leqslant n\}$$

由引理 1、引理 2 及(6)式,可得

$$\begin{aligned}r_1&=\alpha_{11}+\sum_{k=2}^{n}\alpha_{1k}=\\&\alpha_{11}+\sum_{k=2}^{n}\alpha_{11}\sum\nolimits_{p=2}^{n}\beta_{pk}(-a_{1p})=\\&\alpha_{11}(1+\sum\nolimits_{p=2}^{n}(-a_{1p})\sum_{k=2}^{n}\beta_{pk})\leqslant\\&\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}(1+a_{11}\rho_1M_2)=\\&\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}\rho_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}M_2\end{aligned} \tag{8}$$

当 $2\leqslant i\leqslant n$ 时,由(4)式、(5)式及(7)式,得

$$\alpha_{i1}\leqslant p_1\alpha_{11}$$

$$\alpha_{ij}=\beta_{ij}+\alpha_{1j}\sum\nolimits_{k=2}^{n}\beta_{ik}(-a_{k1})=\beta_{ij}+\frac{1}{\alpha_{11}}\alpha_{i1}\alpha_{1j}\leqslant\beta_{ij}+\alpha_{1j}p_1$$

那么

$$\begin{aligned}r_i&=\alpha_{i1}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ij}\leqslant p_1\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}(\beta_{ij}+\alpha_{1j}p_1)=\\&p_1\alpha_{11}+\sum_{j=2}^{n}\beta_{ij}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}p_1\leqslant p_1r_1+M_2\leqslant\\&p_1(\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}\rho_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}M_2)+M_2=\\&\frac{p_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}(1+\rho_1p_1)-s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}M_2\end{aligned} \tag{9}$$

由(8)式与(9)式,可得

$$M_1=\max\{r_1,r_i;2\leqslant i\leqslant n\}\leqslant\max\left\{\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}\rho_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}M_2,\frac{p_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}(1+\rho_1p_1)-s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}M_2\right\}$$

故结论成立。证毕。

定理 2 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M- 矩阵, $u_kp_k<1$, $k=1,\cdots,n$, 则

$$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant\max\left\{\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}u_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\left[\frac{1}{a_{22}(1-u_2p_2)}+\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{1}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod_{j=2}^{i-1}\left(\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right)\right)\right],\right.$$

$$\frac{p_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}(1+u_1p_1)-s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\cdot$$

$$\left[\frac{p_2}{a_{22}(1-u_2p_2)}+\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{p_i}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod_{j=2}^{i-1}\left(\frac{1}{1-u_jp_j}\right)\right)\right]\Bigg\}$$

证明　由定理 1 及 $A^{(k)}$ 的定义，可证明之。其中 $A^{(0)}=A, s_n^1(A^{(n-1)})=0, \rho_1=u_1, u_n=0, p_n=1$。证毕。

由定义 2，$J(A)=\{i\in N: |a_{ii}|>\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|\}\ne\phi$，定义新记号

$$\hat{J}(A)=\{i\in N, i\ne 1: |a_{ii}|>\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|\}\ne\phi$$

定理 3　设 $A\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M- 矩阵，满足 $\hat{J}(A)\ne N-1$，则定理 2 中的结果不大于(3)式中的结果，即

$$max\left\{\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}u_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\left[\frac{1}{a_{22}(1-u_2p_2)}+\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{1}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod_{j=2}^{i-1}\left(\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right)\right)\right],\right.$$

$$\frac{p_1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}+\frac{a_{11}(1+u_1p_1)-s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\cdot$$

$$\left.\left[\frac{p_2}{a_{22}(1-u_2p_2)}+\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{p_i}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod_{j=2}^{i-1}\left(\frac{1}{1-u_jp_j}\right)\right)\right]\right\}\leqslant$$

$$\max\left\{\frac{1}{a_{11}(1-u_1p_1)}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod\nolimits_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right],\right.$$

$$\left.\frac{p_1}{a_{11}(1-u_1p_1)}+\sum\nolimits_{i=2}^{n}\left[\frac{p_i}{a_{ii}(1-u_ip_i)}\prod\nolimits_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jp_j}\right]\right\}$$

证明　由文献[2]中的 Remark2.1，可知 $\frac{s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}}\leqslant\rho_1$，又因为 $\hat{J}(A)\ne N-1$，则 $p_1=1$，因此 $\frac{s_1^n(A^{(0)})}{a_{11}}\leqslant\rho_1p_1$，所以 $\frac{1}{a_{11}-s_1^n(A^{(0)})}\leqslant\frac{1}{a_{11}(1-\rho_1p_1)}$，故，结论成立。

3　算例分析

例　设

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

显然，矩阵 A 是弱链对角占优 M- 矩阵，易于计算 $\|A^{-1}\|_\infty=1.54$，由(1)式可得 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 11$；由(3)式可得 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 6.2$；由文献[4]中的定理 1，知 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 5.6667$；而应用本文的定理 2，得 $\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 3.5615$。

注：例题表明，定理 2 的结果改进了已有结果。

参 考 文 献：

[1] Shivakumar P N,Williams J J,Ye Q,et al.On two-sided bounds related to weakly diagonally dominant M-matrices with application to digital circuit dynamics[J].SIAM J.Matrix Anal.Appl,1996,17(2):298-312.

[2] Li Wen.The infinity norm bound for the inverse of nonsingular diagonal dominant matrices[J]. Appl. Math. Lett, 2008,21(3):258-263.

[3] Huang Tingzhu, Zhu Yan. Estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ for weakly chained diagonally dominant M-matrices[J].Linear Algebra Appl,2010,432(2/3):670-677.

[4] 潘淑珍，陈神灿.弱链对角占优矩阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界估计[J].福州大学学报:自然科学版,2012,40(3):281-284.

[5] 李艳艳，蒋建新.严格对角占优 M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数上界改进的估计式[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(4):97-100.

[6] 胡家赣. $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计及其应用[J].计算数学,1982,4(3):272-282.

[7] Cvetkovic L,Dai P F,Doroslovacki K,et al.Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices[J].Applied Mathematics and Computation,2013,219(10):5020-5024.

[8] Horn R A,Johnson C R.Topics in Matrix Analysis[M]. New York:Cambridge University Press,1991.

[9] 陈景良，陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

Upper Bounds Estimators of $\|A^{-1}\|_\infty$ of Weakly Chained Diagonally Dominant M-matrices A

LIU Xin, *YANG Xiaoying*

(Department of Basic Education, Sichuan Information Technology College, Guangyuan 628017, China)

Abstract: Aiming at the weakly chained diagonally dominant M-matrix A, the new upper bounds estimators for $\|A^{-1}\|_\infty$ are presented by using the estimation range for the elements of inverse matrix. The example analysis shows, the new upper bounds estimators have improved some existed results.

Key words: weakly chained diagonally dominant; M-matrix; infinity norm; upper bound