

一种新蝶状混沌系统的滑模控制方法研究

孙方方, 雷银彬, 朱培勇

(电子科技大学数学科学学院, 成都 611731)

摘 要:引入一种新的蝶状系统,利用 Matlab 软件计算出其存在大于 0 的 Lyapunov 指数,证实该系统是混沌系统,并且通过描绘吸引子相图和分析系统的动力学性质进一步展示系统的混沌性。然后,基于自适应滑模变结构控制的方法,引进恰当的控制律将该系统的混沌状态稳定到指定的平衡点。最后,通过数值仿真,验证所引进的方法对该系统混沌控制具有良好效果。

关键词:蝶状混沌系统;Lyapunov 指数; Lyapunov 稳定;滑模控制

中图分类号:O193

文献标志码:A

引 言

自 Lorenz 在 1963 年发现了混沌吸引子的存在,人们逐渐对普遍存在于自然界和人类生活中的混沌现象进行了不断深入的研究。1989 年,Hubler A 发表了有关控制混沌的第一篇文章^[1],1990 年 Ott E、Grebogi C 和 Yorke J A 提出控制混沌的思想(OGY 控制)^[2]产生了广泛影响。继这些方法之后,人们又提出了多种混沌控制的方法如脉冲控制法、神经网络控制法、线性反馈控制法以及自适应控制法^[3-6]等。但是,由于抗参数干扰的鲁棒性及算法实现简单等特点,滑模控制反而被广泛应用^[3]。该控制与其他常规控制的根本区别在于控制的不连续性,能有效地控制外界扰动对系统的影响,使其对外界变化反应较为迟缓。

文献[7]中研究了一种蝶状混沌系统。在此研究基础上我们给出另外一种蝶状系统,数学模型表述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = xz + by \\ \dot{z} = -xy - cz \end{cases} \quad (1)$$

首先,在参数组 $a = 42, b = 28, c = 8$ 的条件下,通

过计算 Lyapunov 指数,从理论上获得该系统的混沌性;然后,通过使用 Matlab 软件绘图直观地展示该系统的混沌吸引子相图,讨论该系统的基本动力学行为,并且利用滑模变结构方法,找到一簇滑模面,引进恰当的控制律,在不确定的外界扰动影响下将系统控制到稳定水平;最后,通过数值仿真,验证所获得控制方法对于该系统是行之有效的。

1 系统的混沌性判定及动力学性质

1.1 混沌性判定

对于系统(1), a, b, c 为系统的参数。当取定参数 $a = 42, b = 28, c = 8$ 时,通过计算 Lyapunov 指数的方法来判定系统的混沌性。利用 Matlab 软件,通过 Jacobian 计算方法给出系统(1)的 3 个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{L_1} = 2.32, \lambda_{L_2} = -7.17, \lambda_{L_3} = -17.15$ 。由此可知 $\lambda_{L_1} > 0$, 系统(1)为混沌系统。在该组参数下,系统的 Lyapunov 指数谱、混沌吸引子和各平面相图如图 1 与图 2 所示。

1.2 系统(1)的基本动力学性质

1.2.1 对称性和不变性分析

系统(1)关于 Z 轴对称,即它在下列变换下保持

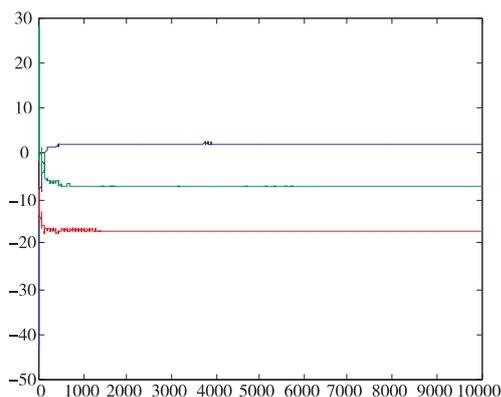


图1 Lyapunov 指数谱

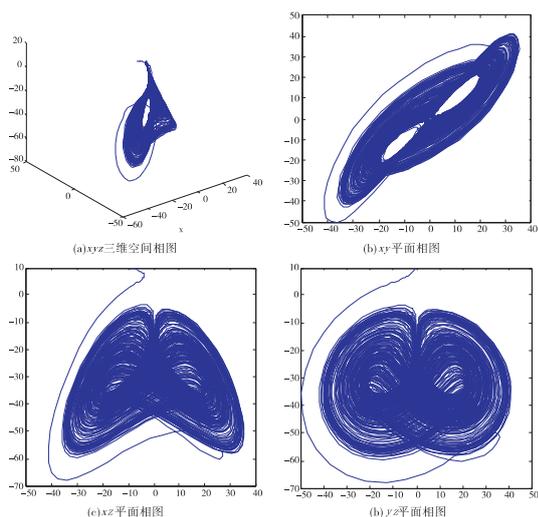


图2 系统(1)的混沌吸引子

不变:

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$$

且这种对称性对于任意的参数 a, b, c 的取值均成立。

1.2.2 耗散性分析和吸引子存在性

对系统(1)有:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a + b - c < 0$$

$$V(t) = V(0)e^{(-a+b-c)t}$$

因此可以得出系统(1)为耗散的,并且以指数形式 $\frac{dV}{dt} = e^{(-a+b-c)t}$ 收敛。此时所有系统的轨线随着时间趋向于无限大而被限制在一个体积为0的集合上,并且它将渐进固定在一个吸引子上,这证实了系统吸引子的存在性。

1.2.3 平衡点及其稳定性

考虑系统(1)的平衡点,令

$$\begin{cases} a(y-x) = 0 \\ xz + by = 0 \\ -xy - cz = 0 \end{cases}$$

其中 $a = 42, b = 28, c = 8$ 。对方程组进行求解,于是得出系统存在三个平衡点: $S_0(0,0,0), S_1(\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, -b), S_2(-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, -b)$, 在平衡点 $S_0(0,0,0)$ 处,系统(1)的 Jacobian 矩阵为:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ z & b & x \\ -y & -x & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

令 $|\lambda I - J_0| = 0$, 由此可得 J_0 的特征方程为:

$$(\lambda + a)(\lambda - b)(\lambda + c) = 0$$

进而可得到 J_0 特征值为 $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = -c$ 。当 $a, c > 0$ 且 $b < 0$ 时,平衡点 $S_0(0,0,0)$ 是稳定的;当 $a < 0$ 或 $b > 0$ 或 $c < 0$ 时,平衡点 $S_0(0,0,0)$ 是不稳定的。当 $a = 42, b = 28, c = 8$ 时, $S_0(0,0,0)$ 为不稳定的。

根据上述同样的方法可以检验出平衡点 S_1 和 S_2 的稳定性。由于系统(1)是对称关于 Z 轴对称的,平衡点 S_1 和 S_2 的稳定性相似,因此,我们只分析 S_1 的稳定性。系统(1)在平衡点 S_1 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J_{S_1} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ z & b & x \\ -y & -x & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -b & b & \sqrt{bc} \\ -\sqrt{bc} & -\sqrt{bc} & -c \end{bmatrix}$$

令 $|\lambda I - J_{S_1}| = 0$, 得到 J_{S_1} 的特征多项式为:

$$\lambda^3 + (a - b + c)\lambda^2 + ac\lambda + 2abc = 0$$

由此可得该矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -30.865, \lambda_2 = 4.433 + 24.289i$ 和 $\lambda_3 = 4.433 - 24.289i$ 。由于 λ_1 和 λ_2 是正实部的共轭复数,且 λ_3 为负数,故 S_1 和 S_2 均为不稳定的鞍焦点。

2 系统(1)的自适应滑模变结构控制

自适应滑模变结构控制是滑模变结构控制与自适应控制的有机结合,是解决参数不确定或时变参数系统控制问题的一种新型控制策略^[8]。下面将从该方法出发,引进新的自适应控制律,使它估计出系统不确定部分的上界,并依此为条件设计变结构控制器。

2.1 滑动模态的选取^[8]

为了选取合适的滑动模态,对系统(1)做变换,令

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{a}x \\ \dot{x}_2 = -x + y \\ \dot{x}_3 = z \end{cases}$$

对其求导得到:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = x_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = abx_1 + (b-a)x_2 + ax_1x_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = -a^2x_1^2 - ax_1x_2 - cx_3 \end{cases} \quad (2)$$

根据滑动模态的存在条件^[8],选取系统(1)的滑动模态为:

$$S(t) = mx_1 + x_2 = 0$$

其中 $m > 0, m \in R_0$. 对其进行求导可得到:

$$S(\dot{t}) = m\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \quad (3)$$

结合式(2)和式(3)可知, x_3 的控制状态将由 x_1 和 x_2 的控制状态决定。

2.2 控制律的设计

根据上述滑动模态的选取方法和可达到条件,设 \bar{h} 为系统(1)不确定部分的上界, \hat{h} 为其估计上界,可设计自适应滑模变结构控制律为:

$$u(t) = -abx_1 + (a-b-m)x_2 - ax_1x_3 + \hat{h}\text{sign}(S) \quad (4)$$

其中, $\hat{h}(t) = -\frac{1}{r}|S|$ 为自适应律, $r > 1$ 为自适应项的增益^[9],且 r 的不同取值决定了系统振荡衰减的速度。

对系统(2)施加外界未知有界扰动 $D(t)$ 和控制律 $u(t)$, 其中 $|D(t)| < \eta$, 则得到如下的方程组:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = x_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = abx_1 + (b-a)x_2 + ax_1x_3 + D(t) + u(t) \\ \dot{\hat{x}}_3 = -a^2x_1^2 - ax_1x_2 - cx_3 \end{cases}$$

由 Lyapunov 稳定性定理,可以定义函数:

$$V = \frac{1}{2}S^2 + \frac{r}{2}\bar{h}(t)^2$$

其中 $\bar{h}(t) = \hat{h}(t) - \bar{h}$ 且 $\bar{h} + \eta < 0$. 对其求导可得:

$$\dot{V} = S\dot{S} + r\bar{h}(t)\dot{\bar{h}}(t) =$$

$$\begin{aligned} & S(m\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + r(\dot{\hat{h}}(t) - \dot{\bar{h}})(\hat{h}(t)) = \\ & S[mx_2 + abx_1 + (b-a)x_2 + ax_1x_3 + \\ & D(t) - abx_1 + (a-b-m)x_2 - ax_1x_3 + \\ & \hat{h}\text{sign}(S)] + r(\dot{\hat{h}}(t) - \dot{\bar{h}})(\hat{h}(t)) = \end{aligned}$$

$$S(\hat{h}\text{sign}(S) + D(t)) + r(\dot{\hat{h}}(t) - \dot{\bar{h}})(\hat{h}(t)) \leq$$

$$\begin{aligned} & \eta|S| + \dot{\hat{h}}(t)|S| + \dot{\bar{h}}|S| - \dot{\hat{h}}(t)|S| = \\ & \eta|S| + \dot{\bar{h}}|S| < 0 \end{aligned}$$

分析上式可知,当引进系统控制律为(4)时,系统(2)的轨线逐渐到被控制到滑动模态上,此后将沿着滑动模态运动到原点,即在原点的位置,系统(2)在控制律(4)的作用下稳定,在该情况下系统(1)也渐进稳定到平衡点 $S_0(0,0,0)$ 。

3 控制效果仿真

系统(1)中,在参数取值为 $a = 42, b = 28$ 以及 $c = 8$, 且在没有外界扰动和控制下,即外界扰动 $D(t) = 0$ 、控制律 $u(t) = 0$ 时,系统(1)的平衡点为 $S_0(0,0,0)$ 和 $S_{1,2}(\pm 14.97, \pm 14.97, -28)$ 。此时系统处于混沌状态。现取 $m = 10$, 设系统存在周期扰动 $D(t) = 0.1\cos(2\pi t)$, 采用式(4)的自适应滑模变结构控制律。则从图 3 中可见,系统的状态逐渐稳定到期望的平衡点,且控制信号也收敛到 0, 由此表明控制取得了预期效果。

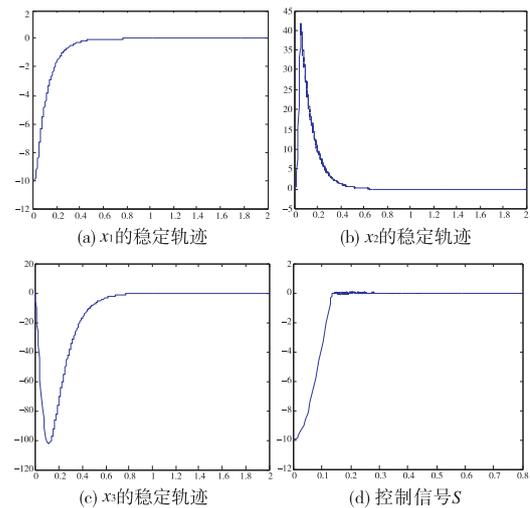


图 3 系统轨线在控制信号下随时间的变换趋势以及滑动模态随时间的变化图

4 结束语

采用自适应滑模变结构控制方法对该种新型的蝶状混沌系统进行了控制,在加入外界扰动的情况下,数值仿真结果表明该控制方法对其效果较好,即该系统在该控制方法下为可控的。抑制混沌的方法有很多^[10],至于是否存在更为行之有效的控制方法,将是进一步研究的内容。

参考文献:

- [1] Hubler A. Adaptive control of chaotic systems[J]. *Helv. Phys. Acta*, 1989, 62(9):343-356.
- [2] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. *Physical Review Letter*, 1990, 64(1):1196-1199.
- [3] Yang Zeng. Adaptive control of chaos in Lorenz system [J]. *Dyn Control*, 1997, 7(3):143-154.
- [4] 王林泽, 高艳峰, 李子鸣. 基于新蝶状模型的混沌控制及其应用研究[J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(7): 915-920.
- [5] 张化光, 王智良, 黄伟. 混沌系统的控制理论[M]. 长春: 东北大学出版社, 2003.
- [6] Ahmed A A, Ahmad R, Yahya A. Variable structure system with sliding mode controller[J]. *Procedia Engineering*, 2013, 53(2):441-452.
- [7] Kim D H. A new butterfly-shaped chaotic attractor[J]. *Results in Physics*, 2013, 3(5):14-19.
- [8] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [9] Kruger T, Schnetter P. Fault-tolerant nonlinear adaptive flight control using sliding mode [J]. *Neural Networks*, 2012, 32(3):267-274.
- [10] I Utkin V, S Poznyak A. Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method[J]. *Automatica*, 2013, 49(7):39-47.
- [6] Ahmed A A, Ahmad R, Yahya A. Variable structure sys-

Study on the Sliding Mode Control Method of a New Butterfly-shaped Chaotic System

SUN Fangfang, LEI Yinbin, ZHU Peiyong

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: A new butterfly-shaped system is introduced at first, and the positive Lyapunov exponents are calculated by Matlab software, which shows the system is chaotic. Chaos characters of system are further demonstrated by portraying the phase diagram of chaos attractor and analyzing the dynamic characters of system. Then based on the adaptive sliding mode variable structure control method, a proper control scheme is introduced to make the chaos state of system driven to an appointed equilibrium point. Finally, numerical simulations demonstrate that this method has good effects for chaos control of this system.

Key words: butterfly-shaped chaotic system; Lyapunov exponent; Lyapunov stability; sliding mode control