文章编号:1673-1549(2014)05-0072-07　　DOI:10.11863/j. suse. 2014. 05. 17

图像滤波中 P-M 方程的两层格式算法

杨　柳, 何国良

(电子科技大学数学科学学院, 成都　611731)

摘　要:基于偏微分方程方法的图像处理是近十多年来发展起来的新兴领域,近年来,偏微分方程在刻画图形演化和进行特征分析等方面取得了非凡的效果,然而使用这些方法却面临着计算效率低下的问题,如何大规模提高图像处理中所涉及微分方程的快速数值计算成为一个数字图像处理里面的重要问题。在经典的 Perona Malik(P－M)方程的图像处理方法基础上,构造显、隐式相结合的两层有限差分格式来提高求解的速度。仿真结果表明,构造的两层格式简单有效。

关键词:非线性扩散方程;有限差分方法;P－M 模型;两层格式;数值解

中图分类号:O241. 82　　**文献标志码**:A

引　言

基于偏微分方程的图像去噪算法主要有两大类:一类是基于变分法的思想;另一类是基于迭代格式,随着时间变化的更新,使得图像逐渐去噪。前者的代表方法是 TV 类方法,后者的代表是基于 Perona 和 Malik 提出的 P－M 方程作为控制方程的各向异性扩散模型。由于 P－M 方程灵活,便于处理复杂的图形图像问题,所以本文主要基于快速数值计算方法。

众所周知,求解偏微分方程的数值方法主要有:有限差分法,有限元法,有限体积法等。在图像处理应用中,有限差分法[1]不仅计算格式简单、实现容易,而且由于能很好地和图像像素空间结构特征很好地吻合,待处理的图像通常是在二维空间中按照等距间隔采样得到的离散数字图像,这正好可以看作有限差分法所需要的等分网格。有限差分法的基本思想是:利用相距有限距离的两邻点的函数值之差与两点间距离的比值来近似函数对变量的偏导数。

P－M 方程经典的有限差分时空全离散主要有显式和隐式两种格式。显式方法不需要直接解离散的庞大线性方程组,可以对较大的图像进行直接处理。然而,这种方法对时间步长和空间步长要求极其严格,从而导致虽然可直接处理的图像空间维度可以很大,但所花时间却是相当长。另一方面,隐式方法理论上对时空离散的步长没有限制,但需要反复求解一组方程组。这在图像比较大的情况下,由于离散方程组的维数很高、奇性比较严重,从而也会带来计算效率低下的问题。

本文将显式和隐式两种格式结合起来,针对 P－M 模型,构造一个新的两层格式算法,该算法在相对较细的网格上用显式计算,而在较粗的网格上用隐式计算。这样一方面可以解决比较大图像直接处理问题,另一方面也可以提高计算速度。通过经典的数值对比实验,本文的算法与传统的格式比较起来,能更节省去噪时间。

1　各项异性扩散模型

Perona 和 Malik 首先提出了能够保持边界的非线性各项异性扩散方程,简称 P－M 模型[2-4]:

收稿日期:2014-06-10

基金项目:国家自然科学基金项目(11371288);国家留学基金项目(201306075029)

作者简介:杨　柳(1989-),女,陕西西安人,硕士生,主要从事偏微分方程数值解及应用方面的研究,(E-mail)648954802@ qq. com;
何国良(1976-),男,四川汉源人,副教授,主要从事偏微分方程数值解及应用方面的研究,(E-mail)hegl@ uestc. edu. cn

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = div(g(|\nabla I|)\cdot \nabla I) \\ I_0 = I(x,y,0)\end{cases} \quad (1)$$

其中,I_0 是原始图像,$I(x,y,t)$ 是 t 时刻原始图像的扩散图像,∇ 是梯度算子,div 是散度算子,$g(r)$ 是扩散系数,$g(r)>0$ 是一个非增函数,其中,若 $g(r)=1$,则模型退化为热传导方程。Perona 和 Malik 给出了两个扩散系数:

(ⅰ) $g(r) = e^{-(\frac{r}{K})^2}$

(ⅱ) $g(r) = \dfrac{1}{1+(\frac{r}{K})^p}, p = 1,2$

其中,常数 K 和噪声的方差有关。P - M 模型是改进的热传导偏微分方程,它是通过函数 $g(r)$ 自适应地控制扩散速度。

P - M 方程本身是病态的[5],它的稳态解不具有对初始条件的连续性依赖。这些缺点使得处理后的图像效果不太理想。将 P - M 方程中的 $g(|\nabla I|)$ 改为 $g(|\nabla I_s|)$,则可消除 P - M 方程的病态性质,其解的存在唯一性得到解决。

为消除 P - M 方程的“病态性”,保持适定性,先采用高斯核对原图进行图像预平滑处理,Catte 在文献[6]中引入正则性 P - M 模型:

$$I_t = div(g(|\nabla I_\sigma|)\nabla I)$$

式中

$$I_\sigma(x,y,t) = G_\sigma * I(x,y,t)$$

这里 G_σ 表示方差为 σ 的 Gaussian 函数,* 表示卷积。考虑到图像本身的噪声,所以在计算扩散图像之前先要将图像进行一次 Gaussian 平滑,以消除噪声导致的无界算子的影响,所以正则化 P - M 模型能更好的消除噪声,仅仅这点变动就克服了 P - M 方程初值问题的不适定性。此模型是空间域正则化模型,克服了 ∇I 对噪声的敏感问题,正则化模型的解是存在、唯一的,并且关于初值是稳定的。本文就对此类二阶非线性扩散方程求其数值解。

2　模型的差分格式

二维的正则化 P - M 方程可以写为如下格式(详细方法参见文献[7 - 10]):

$$\partial I_t = \partial_x[g(|\nabla I_\sigma|)\cdot \partial I_x] + \partial_y[g(|\nabla I_\sigma|)\cdot \partial I_y] \quad (2)$$

对式(2)进行差分,由于在 x 方向和 y 方向是等步长的,即 $\Delta x = \Delta y = h$,时间步长 $\Delta t = \tau$,网格点的坐标记为:$(ih, jh, n\tau)$,$h = 1/N, 0 < i \leq N, 0 < j \leq N$,记 $I_{i,j}^n$ 是 $I(ih, jh, n\tau)$ 的近似值,$g_{i,j} = g(|\nabla I_\sigma|)_{i,j}$。

2.1　显式差分格式

Perona 和 Malik 在文献[1]中,给出如下的显式差分格式求解方程:

$$I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n + \lambda\cdot(g_N^n\cdot\nabla_N^n I + g_S^s\cdot\nabla_S^n I + g_E^n\cdot\nabla_E^n I + g_W^w\cdot\nabla_W^n I) \quad (3)$$

式中:N, S, E, W 分别是 North, South, East 和 West 的简写,$\lambda = \dfrac{\tau}{h}$,在显式方案中 $h=1$,则 $\lambda = \tau$,要求时间步长 $\tau < 0.25$ 的情况下,采用 $p=2$ 的扩散系数(ⅱ),得到的数值解是稳定的。式(3)中符号 ∇ 表示差商,具体形式如下:

$$\nabla_N I_{i,j} = I_{i,j+1} - I_{i,j}, \nabla_E I_{i,j} = I_{i+1,j} - I_{i,j}$$
$$\nabla_S I_{i,j} = I_{i,j-1} - I_{i,j}, \nabla_w I_{i,j} = I_{i-1,j} - I_{i,j}$$

P - M 模型通过 $g(r)$ 函数来自适应地控制扩散速度,即在区域内部加大平滑力度,而在边缘处减小平滑力度甚至不进行平滑。在 P - M 模型中,扩散的大小是根据像素点的梯度绝对值大小来确定的。如果图像中某点的梯度绝对值大于 K 值,那么在迭代的过程中,其梯度值会随着迭代次数的增加而缓慢地减弱,起到保持边缘的作用;如果该点的梯度绝对值小于 K 值,那么在迭代过程中其梯度值很快趋于 0,起到平滑的效果。在 P - M 模型中,边缘采用常用的梯度微分算子来识别。

显式差分格式是最直接的算法,计算简单、条件稳定,要求时间步长必须足够小,但是迭代次数较多,且随着扩散时间的增大,图像变得越来越模糊,最终图像的灰度值变为常数,去噪结果较差。

2.2　半隐式格式

式(2)中方程的右边表示成:

$$div(g\nabla I) = \frac{\partial}{\partial x}(g\frac{\partial I}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\frac{\partial I}{\partial y})$$

在实际应用中常采用一种称为“半点”离散化[3,11]的散度离散化格式,首先计算 gI_x 在“东,西”两个方向的“半点”的值和 gI_y 在“南,北”两个方向的“半点”值,于是得到隐格式为:

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n + \tau\cdot[& \frac{g_{i-1,j}^n + g_{i,j}^n}{2}\cdot(I_{i-1,j}^{n+1} - I_{i,j}^{n+1}) + \\ & \frac{g_{i+1,j}^n + g_{i,j}^n}{2}\cdot(I_{i+1,j}^{n+1} - I_{i,j}^{n+1}) + \\ & \frac{g_{i,j-1}^n + g_{i,j}^n}{2}\cdot(I_{i,j-1}^{n+1} - I_{i,j}^{n+1}) + \\ & \frac{g_{i,j+1}^n + g_{i,j}^n}{2}\cdot(I_{i,j+1}^{n+1} - I_{i,j}^{n+1})] \end{aligned}$$

式中,$I_{i,j}^n$ 和 $I_{i,j}^{n+1}$ 分别表示在 n 和 $n+1$ 时刻的图像,采用

半隐式格式将得到一个线性联立的方程组,用矩阵表示如下:

$$I^{n+1} = I^n + \tau \cdot A^n \cdot I_n^{n+1} \tag{4}$$

式(4)是一个隐式格式,τ 为时间步长,可以写成如下形式:

$$I^{n+1} = (1 - \tau \cdot A^n)^{-1} I^n$$

若 I 是 $M \times N$ 的矩阵,则矩阵 A 是一个 $MN \times MN$ 维的稀疏矩阵,但不是三对角的矩阵。

由于系数矩阵太大求逆困难,Weickert 在文献[12]中提出了加性算子分裂(AOS)算法求解方程(4),AOS 算法是绝对稳定的,可以选用较大的时间步长以提高计算效率。AOS 算法减小了系数矩阵的阶数,并且每个系数矩阵都是三对角矩阵,应用追赶法求解最快,但整体的计算量仍然很大。

2.3 两层格式

在用差分方法对 P-M 方程离散后,得到的显式差分格式是逐层递推求解的。显格式的稳定性较差,要得到稳定的数值解,时间步长要很小,求解的时间较少。隐格式的稳定性比显格式好,可以选取较大的时间步长,但是隐格式求解的时间代价太大。综合显格式和隐格式的特点,本文采取一种两层格式方法,待处理的图像在二维空间中按照等距间隔采样得到离散数字图像,把这个图像看作一个整体来对待,看作待求解的细网格;取细网格中的一个子域作为求解的粗网格,构成了有相互嵌套的两套网格,对方程通过先在粗网格上求解非线性问题,再在细网格上求解相应的线性问题,最终取两次结果的平均值而获得的两层网格算法。两层格式算法:在时间奇数层,运用 P-M 模型的显式格式方案计算,得到一次运算的结果;在时间偶数层,则采用抽取奇数行奇数列交叉位置的值作为待去噪图像,用隐格式方案求解,对隐格式方案得到的结果运用插值方法得到第二次的结果,两者结合起来得到了一个双步过程,再对两次得到的结果取其平均值,作为两层算法一次迭代的结果。同时,由于取样数据个数约是原来图像像素个数的四分之一,隐式格式求解时会在很大程度上提高计算速度。

对式(2)进行差分得到:

$$\frac{I_{i,j}^{n+1} - I_{i,j}^n}{\tau} \approx$$

$$\frac{1}{h}[g_{i\pm\frac{1}{2},j} \cdot (I_{i,j+1} - I_{i,j}) + g_{i\pm\frac{1}{2},j} \cdot (I_{i,j-1} - I_{i,j}) +$$

$$g_{i\pm\frac{1}{2},j} \cdot (I_{i+1,j} - I_{i,j}) + g_{i\pm\frac{1}{2},j} \cdot (I_{i-1,j} - I_{i,j})]$$

在上式中取 $g_{i\pm\frac{1}{2},j}, g_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ 与前面显格式方案中的相同,所以得到两层格式中的第一步:

$$I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n + \lambda \cdot (g_N^n \cdot \nabla_N^n I + g_S^s \cdot \nabla_S^n I +$$
$$g_E^n \cdot \nabla_E^n I + g_W^w \cdot \nabla_W^n I) \tag{5}$$

然后,对图像 I 按照提取图像奇数行奇数列交叉位置的元素作为新的待处理的图像 $I1$,因此式(2)变为:

$$\partial I1_t = \partial_x[g(|\nabla I1_\sigma|) \cdot \partial I1_x] +$$
$$\partial_y[g(|\nabla I1_\sigma|) \cdot \partial I1_y]$$

对上式中的 $gI1_x$ 在"东,西"两个方向的"半点"的值和 $gI1_y$ 在"南,北"两个方向的"半点"值,于是有:

$$(g\frac{\partial I1}{\partial x})_{i,j+\frac{1}{2}} \approx g_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot (I1_{i,j+1} - I1_{i,,j})$$

$$(g\frac{\partial I1}{\partial x})_{i,j-\frac{1}{2}} \approx g_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot (I1_{i,j} - I1_{i,,j-1})$$

$$(g\frac{\partial I1}{\partial y})_{i+\frac{1}{2},j} \approx g_{i+\frac{1}{2},j} \cdot (I1_{i+1,j} - I1_{i,,j})$$

$$(g\frac{\partial I1}{\partial y})_{i-\frac{1}{2},j} \approx g_{i-\frac{1}{2},j} \cdot (I1_{i,j} - I1_{i-1,,j})$$

在上式中,将 $g(r)$ 在"半点"的值用其相邻的两个整点的平均值近似,即

$$g_{i,j+\frac{1}{2}} \approx (g_{i,j+1} + g_{i,j})/2$$
$$g_{i,j-\frac{1}{2}} \approx (g_{i,j-1} + g_{i,j})/2$$
$$g_{i+\frac{1}{2},j} \approx (g_{i+1,j} + g_{i,j})/2$$
$$g_{i-\frac{1}{2},j} \approx (g_{i-1,j} + g_{i,j})/2$$

$div(g \cdot \nabla I1)_{i,j}$ 可以表示为:

$$div(g\nabla I1)_{i,j} \approx (g\frac{\partial I1}{\partial x})_{i,j+\frac{1}{2}} - (g\frac{\partial I1}{\partial x})_{i,j-\frac{1}{2}} +$$
$$(g\frac{\partial I1}{\partial y})_{i+\frac{1}{2},j} - (g\frac{\partial I1}{\partial y})_{i-\frac{1}{2},j} =$$
$$\frac{1}{2}[(g_{i,j+1} + g_{i,j})I1_{i,j+1} + (g_{i,j-1} + g_{i,j})I1_{i,j-1} +$$
$$(g_{i+1,j} + g_{i,j})I1_{i+1,j} + (g_{i-1,j} + g_{i,j})I1_{i-1,j} -$$
$$\frac{1}{2}(g_{i,j+1} + g_{i,j-1} + g_{i+1,j} + g_{i-1,j} + 4g_{i,j})I1_{i,j}$$

整理的到两层格式的第二步:

$$I1_{i,j}^{n+2} = I1_{i,j}^{n+1} +$$
$$\tau \cdot [\frac{g1_{i-1,j}^{n+1} + g1_{i,j}^{n+1}}{2} \cdot (I1_{i-1,j}^{n+2} - I1_{i,j}^{n+2}) +$$
$$\frac{g1_{i+1,j}^{n+1} + g1_{i,j}^{n+1}}{2} \cdot (I1_{i+1,j}^{n+2} - I1_{i,j}^{n+2}) +$$
$$\frac{g1_{i,j-1}^{n+1} + g1_{i,j}^{n+1}}{2} \cdot (I1_{i,j-1}^{n+2} - I1_{i,j}^{n+2}) +$$
$$\frac{g1_{i,j+1}^{n+1} + g1_{i,j}^{n+1}}{2} \cdot (I1_{i,j+1}^{n+2} - I1_{i,j}^{n+2})] \tag{6}$$

对式(5)与式(6)化简得到:

$$I^{n+1} = A^n \cdot I^n \tag{7}$$

$$I1^{n+2} = I1^{n+1} + \tau \cdot B^{n+1} \cdot I1^{n+2} \tag{8}$$

式(7)和式(8)可以转化为一些具有三对角系数的矩阵方程组。假定第 n 层的 $I^n_{i,j}$ 已经求出,则由式(7)迭代可以求出 I^{n+1},提取 $n+1$ 层奇数行奇数列交叉处的元素作为 $I1^{n+1}$,再由式(8)求出 $I1^{n+2}$,然后对 $I1^{n+2}$ 进行插值运算得到与 $I1$ 相同大小的去噪后图像 I^{n+2},再对 I^{n+1} 与 I^{n+2} 求平均值作为下一次运算的初始值。

两层格式计算过程:

第一步:输入含噪声图像后,把噪声图像作为原始的图像,分别求出 x 、y 方向的差商,用来替换原来方程中的梯度,然后求解方程(7),得到 I^{n+1} ;

第二步:提取 I^{n+1} 的奇数行奇数列位置的值,作为新的含噪声图像,应用加性算子分裂(AOS)算法,得到分别关于 x 、y 方向的三对角矩阵方程,分别用追赶法求解,然后求两组解的平均值得到方程(8)的解;

第三步:插值。沿着 x 轴方向,对奇数行相邻两个点应用拉格朗日插值,得到偶数位置点的像素值并作为已知的像素点,然后沿 y 轴方向,对相邻的两个点用拉格朗日插值,得到所有的偶数行的像素值,即得到所有的像素点值;

第四步:取第二步和第三步得到的结果的平均值作为加噪图像,重复第一步到第四步,直到迭代结束。

非线性扩散滤波 P－M 模型的显式离散化方法只有在很小的时间步长下才是稳定的,而 AOS 算法[12-14]是无条件稳定的数值解法。对半隐格式应用追赶法求解一次迭代时间远比显格式慢,但是可以使用较大的时间步长。半隐格式是绝对稳定的,显式格式需要迭代很多次,而使用半隐格式迭代次数很少就可以得到较理想的效果,因此在处理时间上,半隐格式是明显比显格式慢的。

对于插值方法,把图像的一行或列的像素值看作已知点,相邻两个数据之间做一次 Lagrange 插值,求出其它未参与运算的像素点的值。在两层格式中,第一个方程式(7)相当于一次显格式求解,第二个方程式(8)相当于一次隐格式求解,所以,在这个双层算法中,每层的计算选取的参数 K 不同,每一次循环可以得到在显格式求解的数值解和选取部分像素之后用隐格式求解得到的数值解,取这两个解的平均值得到新的图像,进入下次循环。取平均值相当于对没有选取的像素点进行平滑,更接近于原图像的像素值,如果相邻两点的像素值相差非常大,在隐格式求解时用到较大的值,那么插值时,原本较小的值的位置插值或许比较大,就与原来图像相差太大。比如加噪后图像的 5 个像素为:0.2、0.1、150.25、150.33、150.45 在隐格式求解的时候选取的像素点为第 1、3、5,参与计算后,数据不会有太大的改变,比如说得到:0.15、150.3、150.10,那么插值之后的 5 个像素值分别是:0.15、75.225、150.3、150.2、150.1,明显地,第 2 个像素点的变化是非常大的。而显格式是所有像素点都参与计算,对初始的 5 个数据,计算后的数据仍不会有太大变化,比如显式格式去噪一次后得到:0.1、0.05、149.7、150.1、150.2,两组数据取平均之后得到:0.125、37.6375、150、150.15、150.15,第 2 个像素点的变化相对直接插值后的结果变小,而经过几次循环后,会更加明显。

3　实验结果与分析

为检验上述 P－M 两层格式扩散方程的去噪效果,对噪声图像分别用 P－M 方程的显格式方法、隐格式方法、两层格式去噪,并采用均方差测度(Mean Squared Error, MSE)作为评价去噪后图像与原始清晰图像的逼近程度,图像的均方差测度由以下公式给出:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[I(i,j) - \hat{I}(i,j)\right]^2}{MN} \tag{9}$$

其中,$I(x,y)$ 是原始的清晰图像,$\hat{I}$ 是去噪后的图像,M、N 分别是图像在 x 与 y 方向的像素点个数。均方差测度越小,表示去噪后图像越逼近于原始图像,去噪效果就越好。

实验一:在 Matlab7.12.0 环境下,分别对 P－M 模型的显格式、隐格式和两层格式方法的算法进行实验,并验证两层格式的可行性与有效性,并比较三者花费的时间(图 1)。图 1(a)是选取的是 500×362 的图像,图 1(b)是对原图图像添加由 randn 添加的标准差为 30 的正态高斯噪声后的图像,图 1(c)~图 1(e)分别是采用三种格式滤波后的结果。其中,显格式为时间步长取 0.1,20 次迭代;隐格式为:时间步长取 5,迭代 3 次;两层格式,迭代 2 次。

直观上看,三种离散格式方法在平滑噪声的同时,在不同程度上平滑了图像的特征。观察花瓣上的黑点可知,显式离散格式处理后的图像中的黑点被平滑得更多(图 1(c)),隐格式较好(图 1(d)),两层格式对细节的保护更好一些(图 1(e))。

由正则化的 P－M 方程滤波结果可以看出,两层格式只要迭代 1~2 次就可以达到很好的效果。对图 1(a),显格式迭代 20 次达到比较好的效果,耗费时间 0.656 819 秒;隐格式迭代 3 次达到较好的效果,迭代时间为 2.201 353 秒,两层格式迭代 2 次达到效果,迭代时

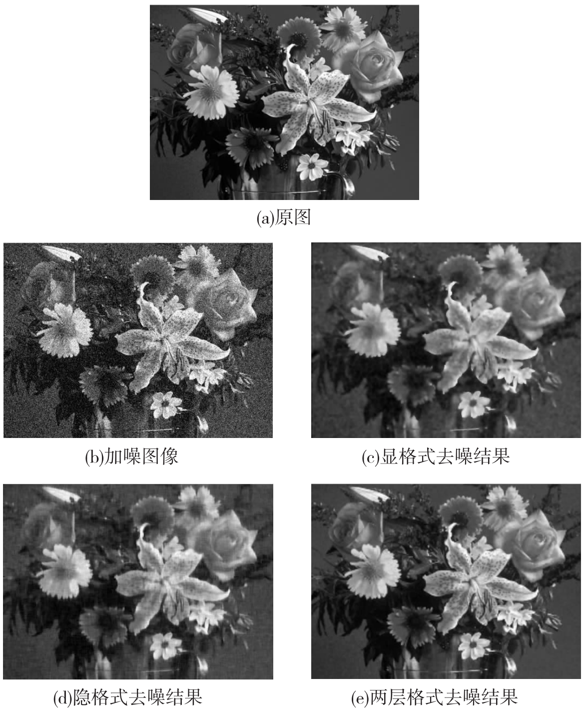


图 1　三种格式对高斯噪声图像去噪实验结果

间为 0.874 267 秒。显然,两层格式运行的时间与显格式相当,又远远小于隐格式运行时间,约为隐格式迭代时间的三分之一。

对图 1 所得到的实验结果,分别求取与原始图像(图 1(a))的差异图像,对其元素归一化后,按列求范数得到误差图像,如图 2 所示。

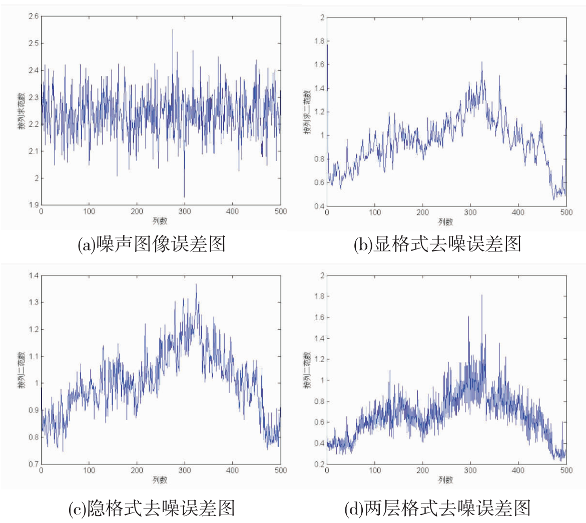


图 2　加噪图像及三中格式去噪后的误差图像

误差图像列的二范数越小,说明去噪后的图像越接近原始图像。从图 2 可以看出,噪声图像与原始图像的差异集中在 2.1 ~2.5 之间(图 2(a));显格式去噪图像与原始图像的差异集中在 0.6 ~1.2 之间(图 2(b));隐格式去噪图像与原始图像的差异集中在 0.7 ~1.3 之间(图 2(c));两层格式去噪图像与原始图像的差异集中在 0.3 ~1.2 之间(图 2(d)),因此两层格式去噪后的图像与原始图像更接近。

采用式(9),分析图 1 中分别用显格式、隐格式、两层格式去噪后的图像与原始清晰图像的逼近程度,如图 3 所示,其中,横轴表示迭代次数,纵轴表示 MSE 的值。

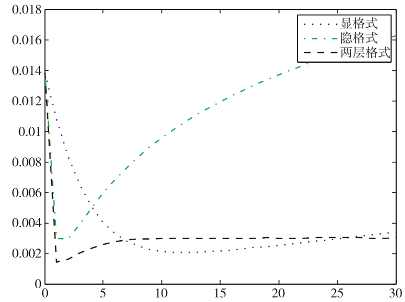


图 3　MSE 方法对显格式、隐格式、两层格式的去噪效果分析

由图 3 可以看出,隐格式与两层格式在迭代次数小于 5 时,就能达到较好的去噪效果,而显格式在 15 次之后才会有较好的效果,隐格式去噪会随着迭代次数的增加,图像模糊的最严重。

实验二:如图 4 所示,图 4(a)是选取的 512 ×512 的图像,图 4(b)是对原图添加由 randn 添加的标准差为 30 的正态高斯噪声后的图像,图 4(c) ~图 4(e)分别是采用三种格式滤波后的结果。其中,图 4(c)为时间步长取 0.25,迭代 10 次的结果;图 4(d)为时间步长取 5,迭代 3 次的结果;图 4(e)为迭代 2 次的结果。

直观上看,三种离散格式方法在平滑噪声的同时,会在不同程度上平滑了图像的特征。显然,显式离散格式处理后的图像被平滑的更多,隐格式较好,两层格式对细节的保护更好一些。

由正则化的 P - M 方程滤波结果可以看出,两层格式只要迭代 1 ~2 次就可以达到很好的效果。对图 4(a),显格式迭代 10 次达到比较好的效果,耗费时间 0.724 962 秒;隐格式迭代 3 次达到较好的效果,迭代时间为 2.423 544 秒,两层格式迭代 2 次达到效果,迭代时间为 1.140 533 秒。明显地,两层格式运行的时间与显格式相当,又远远小于隐格式运行时间,约为隐格式迭代时间的一半。

对图 4 中各去噪图像分别求取与原始图像(图 4(a))的差异图像,对其元素归一化后,按列求范数得到如下误差图像:

误差图像列的二范数越小,说明去噪后的图像越接

(a)原图

(b)加噪图像

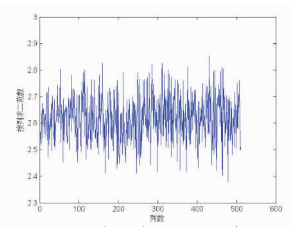
(c)显格式去噪图像

(d)隐格式去噪图像

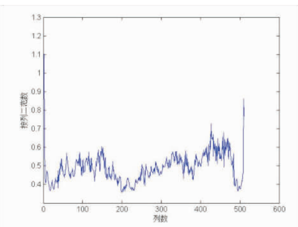
(e)两层格式去噪图像

图 4　三种格式对高斯噪声图像去噪实验结果

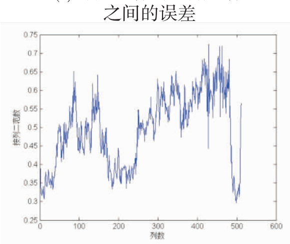
近原始图像,图 5 表明,显式格式处理的图像在边界出的误差较大,两层格式去噪后的图像与原始图像更接近。



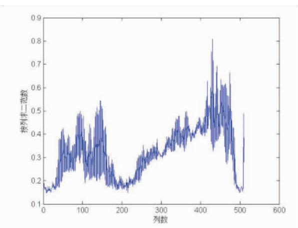
(a) 噪声图像与原始图像之间的误差



(b)显格式去噪误差图



(c) 隐格式去噪误差图



(d) 两层格式去

图 5　加噪图像及三中格式去噪后的误差图像

采用式(9),分析图 4 中分别使用显格式、隐格式、两层格式去噪后的图像与原始清晰图像的逼近程度,如图 6 所示,其中,横轴表示迭代次数,纵轴表示 MSE 的值。

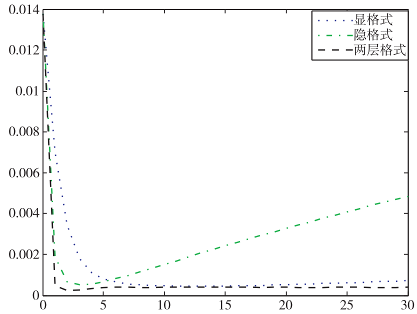


图 6　MSE 方法对显格式、隐格式、两层格式的去噪效果的分析

均方差测度越小,表示去噪图像越逼近于原始图像,去噪效果就越好。由图 6 可以看出,隐格式与两层格式在迭代次数小于 5 时,就能得到较好的效果,显格式在迭代 20 次左右,能得到较好的去噪效果。

在三种离散格式的实现中,若迭代次数是一个固定不变的值,P－M 扩散模型对不同图像的扩散滤波作用显然是不确定的。迭代次数的取值严重影响 P－M 扩散,迭代较少无法去除噪声,难以达到较好的去噪效果;而迭代过多,虽然噪声被完全去除掉了,但是大量的细节信息也会被平滑掉。因此,Perona－Malik 算法的迭代次数并非越多越好,反而,迭代越多,图像的效果越不好,最后出现“块状效应”[16]。P－M 算法不能去掉变化比较大的噪声,原因是 P－M 算法不能正确区分边缘和噪声。主观上,Perona－Malik 算法性能较好,因为其更好地保留了图像的边缘等细节。

4　结束语

通过对图像去噪中的经典非扩散方程——P－M 模型的介绍以及相关理论的分析,将无条件稳定的显－隐格式[17-20]与插值问题[21-23]相结合,应用于此扩散方程,构造了新的去噪方法。实验表明本文的两层格式算法在较好地保持图像边缘信息的情况下能有效地去除噪声。传统的显格式方法去除噪声的效果不如隐格式方法,运行所用的时间远小于隐格式所用的时间。而构造出的两层格式方法与传统的隐格式方法相比,去噪效果比隐格式好,运行时间也远小于隐格式所用的时间,约为隐格式所用时间的三分之一。这是因为两层格式本身具有以下特点:在求解第二个方程时,参与运算的像素点个数远远少于原图像素点数,大约是原图像素点数的四分之一,又加入插值运算。因此,基于 P－M 方程的图像去噪两层格式算法是一种高效可行的数值方案,能在保证去噪效果的同时,明显减少运行时间。

参考文献:

[1] 冯象初,王卫卫.图像处理的变分和偏微分方程方法[M].北京:科学出版社,2009.

[2] Perona P,Malik J.Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J].IEEE Trans. on PAMI,1990,12(7):629-639.

[3] 赵凤群,智 佳,戴 芳,等.Perona-Malik 模型离散格式的改进[J].西安工业大学学报,2007,27(1):83-87.

[4] Gabor D.Information theory in electron microscopy[J]. Laboratory Investigation,1965,14(6):801-807.

[5] 王大凯,侯榆青,彭进业.图像处理的偏微分方程方法[M].北京:科学出版社,2008.

[6] Catte F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM J.Numer.Anal,1992,29(1):182-193.

[7] Jain A K.Partial differential equations and finite-difference methods in image processing[J].Journal of Optimization Theory and Application,1977,91(23):65-91.

[8] 陈一虎,叶正麟. 一种改进的各向异性扩散图像去噪方法[J].计算机工程与应用,2008,44(13):170-172.

[9] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J].Physica D Nonlinear Phenomena,1992,60:259-268.

[10] Witkin A.Scale - space filtering[C]//Proc of 8th Int. Joint Conf. Artificial Intelligence, Karlsruhe: William Kaufmann Publishers Inc,1983(2):1019-1022.

[11] Osher S,Fedkiw R.Level set methods and dynamic implicit surfaces[M].New York:Spring-Verlag,2003.

[12] Weickert J.Application of nonlinear diffusion in image processing and computer vision[J]. Acta Math. Univ. Comenianae,2001,LXX(1):33-50.

[13] weickert J. Anisotropic diffusion in image Processing [M].Stuttgart:Eubner-Verlag,1998.

[14] Weickert J. Scharr H. A scheme for coherence-enchancing diffusion filtering with optimized rotation invariance[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation,2002,13(1-2):103-118.

[15] Weickert J.Partial differential equations in image processing and computer vision[D].Mannheim:University of Mannheim,2001.

[16] 吴亚东,张红英,吴 斌.数字图像修复[M].北京:科学出版社,2010.

[17] 任丽莎.数字图像去噪的模型研究[D].重庆:重庆理工大学,2012.

[18] 王仲兰.图像去噪的各向异性扩散方法[D].郑州:郑州大学,2010.

[19] 马明书.二维抛物型方程的一族两层显式格式[J].河南师范大学学报:自然科学版,2002,30(1):23-25.

[20] 曹广满.对流扩散方程的一种新型紧致差分法[D].天津:天津师范大学,2010.

[21] 杨建宏.抛物型方程的有限差分法显 - 隐格式比较分析[J].河南科学,2012,30(4):407-410.

[22] 曾文平.高阶抛物型方程的具有高稳定性的显式与半显式差分格式[J].应用数学学报,1996,19(4):631-634.

[23] 阮秋琦.数字图像处理学[M].北京:电子工业出版社,2001.

[24] 刘珊珊.基于统计估计的图像边缘插值方法[D].衡阳:南华大学,2012.

Two Layers Format Algorithm of P-M Equation in Image Filtering

YANG Liu, *HE Guoliang*

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: The image processing based on PDE method is an emerging field developed over the past decade. In recent years, the partial differential equations have achieved extraordinary effect in the characterization of graphics evolution, feature analysis and other aspects, while the problem of low calculation efficiency has appeared in the use of these methods. Therefore, how to massively improve the fast numerical calculation of differential equation involved in image processing becomes an important problem in digital image processing. Based on the classical image processing method of Perona Malik (PM) equation, the two layers finite difference scheme is constructed by combing the explicit and implicit expression to improve the speed of solving. A large number of numerical results show that the two layers constructed is simple and effective.

Key words: nonlinear diffusion equation; the finite difference method; P-M model; two layers format; the numerical solution