第 27 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 5
2014 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2014
文章编号:1673-1549(2014)05-0022-03　　DOI:10.11863/j. suse. 2014. 05. 06

两端任意线弹性支承的压杆稳定性研究

黄开志, 陈小亮

(重庆科技学院数理学院, 重庆 401331)

摘　要:基于挠曲线近似微分方程,对两端任意线弹性支承的压杆用 10 个初参数,建立了其处于微弯曲平衡状态时统一的变形方程、静力平衡方程和物理方程。由齐次线性方程组有非零解的条件,导出了求解临界压力的特征方程。验证了在完全理想支承下计算临界压力的欧拉公式仅是本文导出公式的特例,同时以六个非完全理想支承的压杆为例,计算其长度因数。系统地解决了两端任意线弹性支承的压杆临界压力的计算问题。

关键词:材料力学;线弹性支承;细长压杆;临界压力;特征方程;欧拉公式

中图分类号:O341　　**文献标志码**:A

文献[1-5]采用统一的计算模型,得到了各种理想支承下的等截面细长压杆临界压力计算公式。工程实际中,由于一些结构的特殊需求或制造工艺上的缺陷以及制造成本等因素,其连接处既不是理想铰支也不是理想固支,而是处于半刚性连接状态[6],即支承对压杆的挠度约束的刚度系数或(和)对压杆的转角约束的刚度系数不是零或无穷大,而是介于零与无穷大之间。为此,需要解决各种可视为弹性支承的压杆临界压力计算问题。对这类压杆,一般的材料力学教材[7],没有给出临界压力的求解方法,文献[6,8-10]用初参数法、能量法和有限元法等对这类问题进行了一些研究,但研究的类型不够全面、较琐碎或为近似方法,难以为工程实际提供基于严格数理基础且全面、简洁易用的计算公式。

本文拟对两端任意线弹性支承的压杆的稳定性进行系统研究,建立统一的临界压力特征方程,以彻底解决临界压力的计算问题。

1　公式推导

设两端线弹性支承下的等截面细长压杆长为 l,抗弯刚度为 EI,其处于微弯曲平衡状态,其受力和变形可建立如图 1 所示模型。

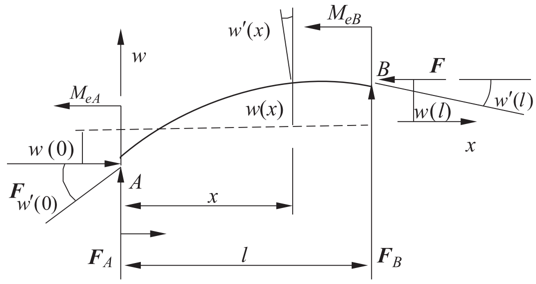

图 1　整体微弯曲平衡状态

1.1　变形方程

弯矩方程:

$$M(x) = F_B(l-x) + F[w(l) - w(x)] + M_{eB}$$

由挠曲线近似微分方程 $EIw''(x) = M(x)$ 得

$$EIw''(x) = F_B(l-x) + F[w(l) - w(x)] + M_{eB}$$

令 $k^2 = \dfrac{F}{EI}$,则挠曲线近似方程 $w(x)$ 为:

$$w(x) = a\cos kx + b\sin kx + \frac{F_B}{F}(l-x) + \frac{M_{eB}}{F} + w(l) \quad (1)$$

转角方程:

$$w'(x) = -ak\sin kx + bk\cos kx - \frac{F_B}{F} \quad (2)$$

收稿日期:2014-05-08
基金项目:重庆科技学院教改项目(2014042)
作者简介:黄开志(1969-),男,四川遂宁人,教授级高级工程师,主要从事力学计量测试技术方面的研究,(E-mail)mocd361@163.com

1.2　变形边界条件

在(1)式和(2)式中令 $x=0$,得到 A 端的变形满足

$$a+\frac{F_B}{F}l+\frac{M_{eB}}{F}-w(0)+w(l)=0 \tag{3}$$

$$bk-\frac{F_B}{F}-w'(0)=0 \tag{4}$$

在(1)式和(2)式中令 $x=l$,得到 B 端的变形满足

$$a\cos kl+b\sin kl+\frac{M_{eB}}{F}=0 \tag{5}$$

$$-ak\sin kl+bk\cos kl-\frac{F_B}{F}-w'(l)=0 \tag{6}$$

1.3　静力平衡条件

压杆整体处于微弯曲平衡状态,其受力满足

$$\sum F_{iw}=0:F_A+F_B=0$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i)=0:\ M_{eA}+F_Bl+M_{eB}+F[w(l)-w(0)]=0$$

两式均同除 F 变为:

$$\frac{F_A}{F}+\frac{F_B}{F}=0 \tag{7}$$

$$\frac{M_{eA}}{F}+\frac{F_B}{F}l+\frac{M_{eB}}{F}-w(0)+w(l)=0 \tag{8}$$

1.4　物理条件

设线弹性支承 A、B 对压杆的挠度约束的刚度系数分别为 K_A、K_B,对压杆的转角约束的刚度系数分别为 C_A、C_B,则压杆在支承处的约束反力和变形满足物理方程:

$$F_A+K_Aw(0)=0$$
$$M_{eA}+C_Aw'(0)=0$$
$$F_B+K_Bw(l)=0$$
$$M_{eB}+C_Bw'(l)=0$$

上述四式均同除 F,并考虑到 $F=k^2EI$,则有

$$\frac{F_A}{F}+\frac{K_A}{k^2EI}w(0)=0 \tag{9}$$

$$\frac{M_{eA}}{F}+\frac{C_A}{k^2EI}w'(0)=0 \tag{10}$$

$$\frac{F_B}{F}+\frac{K_B}{k^2EI}w(l)=0 \tag{11}$$

$$\frac{M_{eB}}{F}+\frac{C_B}{k^2EI}w'(l)=0 \tag{12}$$

1.5　特征方程

由(3)式~(12)式确定了一个关于 10 个初参数 a、b、F_A/F、M_{eA}/F、F_B/F、M_{eB}/F、$w(0)$、$w'(0)$、$w(l)$、$w'(l)$ 的齐次线性方程组,其有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零,由此得到临界压力的特征方程。

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & l & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & k & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
\cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-k\sin kl & k\cos kl & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_A}{k^2EI} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_A}{k^2EI} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_B}{k^2EI} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_B}{k^2EI}
\end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

2　公式应用

由方程(13)可求得最小正数解 $k_{\min}$,由 $k^2=\frac{F}{EI}$ 可求得临界压力 $F_{cr}=k_{\min}^2EI$,与欧拉公式 $F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(ul)^2}$ 相比较,即令 $k_{\min}^2EI=\frac{\pi^2EI}{(ul)^2}$,可得到长度因数 $u=\frac{\pi}{k_{\min}l}$。

线弹性支承的压杆分为完全理想支承压杆和非完全理想支承压杆。完全理想支承压杆是指支承的每个刚度系数只能取零或无穷大,其取值见表 1。非完全理想支承压杆是指至少有一个刚度系数为非零有界值的压杆。

表 1　理想支承刚度系数表

支承情况 A - B	刚度系数 K_A	C_A	K_B	C_B	u
固支 - 固支	∞	∞	∞	∞	0.5
固支 - 铰支	∞	∞	∞	0	0.7
固支 - 定向	∞	∞	0	∞	1
固支 - 自由	∞	∞	0	0	2
铰支 - 铰支	∞	0	∞	0	1
铰支 - 定向	∞	0	0	∞	2

2.1　完全理想支承压杆计算

完全理想支承压杆作为线弹性支承压杆的特例,对其处理过程为:

(1)将方程(13)用软件(maple)展开。

(2)根据支承情况,用所有非零刚度系数的乘积去除展开式(符号运算),对所有非零刚度系数取无穷大,并注意到零刚度系数项,即能充分消项。

(3)求解最小正数解 $k_{\min}$,并进一步求得长度因数 u,结果见表 1,与理论预期完全相符。

2.2 非完全理想支承压杆计算

非完全理想支承压杆支承的刚度系数一般为有界值。将表 2 中的 6 组数据分别代入方程(13),借助计算软件可得到最小正数解 $k_{\min}$,并进一步求得长度因数 u,结果见表 2。

表 2 非完全理想支承的压杆

支承情况 $A-B$	刚度系数 K_A MN/m	C_A MN·m/rad	K_B MN/m	C_B MN·m/rad	u
弹性固支-弹性固支	10	4	8	6	0.65
弹性固支-弹性铰支	10	4	8	0	0.71
弹性固支-弹性定向	10	4	0	6	1.31
弹性固支-自由	10	4	0	0	2.39
弹性铰支-弹性铰支	10	0	8	0	1.01
弹性铰支-弹性定向	10	0	0	6	2.26

注:$l=5$ m, $EI=4$ MN·m^2

若其有无穷大的刚度系数,则按 2.1 中步骤(1)、(2)处理即可。

3 结束语

本文利用初参数法,导出了两端任意线弹性支承的压杆临界压力特征方程,为工程应用提供了严密、简洁、易用的参考公式。

同时验证了两端完全理想支承的压杆临界压力计算的欧拉公式,仅是本文导出的公式的特例。

参 考 文 献:

[1] 李有兴,肖芳淳.用弯剪矩阵法确定压杆临界力的教学研究[J].力学与实践,1995,17(1):69-71.

[2] 张春晓.关于弯剪矩阵的思考[J].力学与实践,1997,19(2):68-69.

[3] 冯贤贵.细长压杆临界压力的统一推导[J].力学与实践,2003(4):65-67.

[4] 曾生桥.细长压杆临界压力欧拉公式的另一种统一推导[J].常州工学院学报,2007,20(2):48-50.

[5] 董冠文.压杆稳定临界力欧拉公式统一推导[J].武汉工程大学学报,2012,34(12):71-74.

[6] 叶学林,周瑞忠.半刚性连接压杆的稳定计算公式[J].福建建筑,2003(增刊):21-23.

[7] 刘鸿文.材料力学[M].5 版.北京:高等教育出版社,2011.

[8] 刘协权,倪新华.支承弹性对压杆临界载荷的影响[J].军械工程学院学报,2003,15(3):73-78.

[9] 宣海洋.弹性介质上等截面压杆稳定分析[J].山西建筑,2010,36(9):45-46.

[10] 张晓霞,钟文生,姚 远.初始挠度及中间弹性支承对压杆稳定的影响分析[J].机械设计与研究,2011,38(6):1-4.

Study on the Stability of a Long Column Supported by Any Linear Elastic Supports at the Two Ends

HUANG Kaizhi, *CHEN Xiaoliang*

(School of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on the approximate differential equation of flexural curve, aiming at the long column supported by any linear elastic supports at the two ends, by 10 initial parameters, under the condition of micro bending equilibrium, thg unified deformation equation, the static equilibrium equations, and the constitutive equation are established, By the condition of homogeneous linear equations with non-zero solution, the characteristic equation to solve critical force is obtained. In the case of completely ideal supports, the Euler's formula for computing the critical force is verified just a special case of the derived formula in the study, at the same time, taking six long columns of not completely ideal supports as examples, to calculate the factor of length. The problem to calculate the critical pressure of a long colum supported by any linear elastic supports at the two ends is solved systematically.

Key words: mechanics of materials; linear elastic support; long colum; critical force; characteristic equation; Euler's formula