第 27 卷第 3 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 27 No. 3
2014 年 6 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Jun. 2014
文章编号:1673-1549(2014)03-0098-03 DOI:10.11863/j.suse.2014.03.22

关于两个 M- 矩阵 Hadamard 积的特征值的新估计

周 平

(文山学院数学学院, 云南 文山 663000)

摘 要:对在不同情况下,两个非奇异 M - 矩阵的 Hadamard 积做进一步研究,并给出 $\tau(B\circ A^{-1})$ 和 $\tau(A\circ A^{-1})$ 的相应的新结果;算例表明,新估计式在一定条件下改进了 Fiedler 和 Markham 的猜想,同时也改进了现有文献的结果。

关键词:M - 矩阵;Hadamard 积;最小特征值;对角占优;双随机

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

1 基本定义、引理和符号说明

定义 1[1-3] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,若 $a_{ij}>0;i,j\in N$,则称 A 为正矩阵,记为 $A>0$;若 $a_{ij}\geqslant 0;i,j\in N$,则称 A 为非负矩阵,记为 $A\geqslant 0$。

定义 2[1] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$,令 $\sigma(A)=\{\lambda_i,i=1,2,\cdots n\}$,则 $\sigma(A)$ 叫做 A 的谱;把 $\sigma(A)$ 中模最大的,即 $\rho(A)=\max\{|\lambda_i|,i\in N\}$ 叫做 A 的谱半径。

定义 3[1] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 且 $a_{ij}\leqslant 0;i\neq j;i,j\in N$,则称 A 为 Z - 矩阵,记所有 $n\times n$ 阶 Z - 矩阵所成之集为 Z_n。

定义 4[1] 设 $A=(a_{ij})\in Z_n$,记 $\tau(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$,称 $\tau(A)$ 为 A 的最小特征值。

定义 5[1] 若 $A=(a_{ij})\in Z_n$ 可表示为 $A=sI-P$,其中 $P\geqslant 0,s\geqslant\rho(P)$,则称 A 为 M - 矩阵。特别地,当 $s=\rho(P)$ 时,称 A 为奇异 M - 矩阵;当 $s>\rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 M - 矩阵。记所有 n 阶非奇异 M - 矩阵所组成的集合为 M_n。

定义 6[1] 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n},B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$,定义 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in C^{m\times n}$,即

$$A\circ B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \ldots & a_{1n}b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}b_{m1} & \ldots & a_{mn}b_{mn}\end{bmatrix}$$

$A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积。

为了便于本文的叙述,文中引入以下符号:

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是非奇异 M - 矩阵,对任意 $i,j,k\in N,\ i\neq j$,定义

$$\Delta_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|$$

$$d_i=\frac{\Delta_i}{|a_{ii}|}$$

$$t_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}$$

$$t_j=\max_{j\neq i}\{t_{ji}\}$$

引理 1[4] 若 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,则对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 和任意的正实数组 $x_1,x_2,\ldots,x_n$,A 的特征值位于区域:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\leqslant\alpha\left(\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}x_j|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(x_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|\right)\right\}$$

引理 2[5] 如果 $A=(a_{ij})$ 为行严格对角占优 - 矩阵,那么 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,且有

$$|\beta_{ji}|\leqslant t_{ji}|\beta_{ii}|,\ i,j\in N,\ j\neq i$$

引理 3[6-10] 如果是一个行严格对角占优 - 矩阵,那么 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,且有

收稿日期:2013-12-20

基金项目:云南省科技厅应用基础研究项目(2013FD052);云南省教育厅项目(2013Y585);文山学院重点学科建设项目(12WSXK01)

作者简介:周 平(1987-),女,云南大理人,助教,硕士,主要从事数值代数和矩阵理论及其应用方面的研究,(E-mail)yunpzjy@126.com

$$\beta_{ii} \geqslant \frac{1}{a_{ii}},\ i \in N$$

引理 4[5]　若且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵,则

$$\beta_{ii} \geqslant \frac{1}{1 + \sum\limits_{j \neq i} t_{ji}},\ i \in N$$

2　$\tau(B \circ A^{-1})$ 和 $\tau(A \circ A^{-1})$ 的估计式

定理 1　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格行对角占优 M - 矩阵,$B = (b_{ij}) \in M_n$,$A^{-1} = (\beta_{ij})$,则

$$\tau(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - \alpha t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| - (1 - \alpha) t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|}{a_{ii}} \right\}$$

证明　记 $\lambda = \tau(B \circ A^{-1})$。(1) 当 $A \circ B$ 为不可约矩阵时,根据 Hadamard 积的定义可得到 A,B 也为不可约矩阵,应用引理 1 和引理 2 可知,存在 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,有

$$\begin{aligned}
&|\lambda - b_{ii}\beta_{ii}| \leqslant \alpha\Big(\frac{1}{t_i}\sum_{j \neq i} t_j |b_{ij}\beta_{ij}|\Big) + \\
&(1 - \alpha)\Big(\frac{1}{t_j}\sum_{j \neq i} t_i |b_{ji}\beta_{ji}|\Big) \leqslant \\
&\alpha\Big(\frac{1}{t_i}\sum_{j \neq i} t_j |b_{ij}| \cdot t_{ij} |\beta_{ii}|\Big) + \\
&(1 - \alpha)\Big(\frac{1}{t_j}\sum_{j \neq i} t_i |b_{ji}| \cdot t_{ji} |\beta_{ii}|\Big) \leqslant \\
&\alpha\Big(\frac{1}{t_i}\sum_{j \neq i} t_j |b_{ij}| \cdot t_i |\beta_{ii}|\Big) + \\
&(1 - \alpha)\Big(\frac{1}{t_j}\sum_{j \neq i} t_i |b_{ji}| \cdot t_j |\beta_{ii}|\Big) = \\
&\alpha t_j |\beta_{ii}| \sum_{j \neq i} |b_{ij}| + (1 - \alpha)\Big(t_i |\beta_{ii}| \sum_{j \neq i} |b_{ji}|\Big)
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\lambda \geqslant b_{ii}\beta_{ii} - \alpha t_j |\beta_{ii}| \sum_{j \neq i} |b_{ij}| - \\
&(1 - \alpha)\Big(t_i |\beta_{ii}| \sum_{j \neq i} |b_{ji}|\Big)
\end{aligned}$$

根据引理 3,该式变为

$$\lambda \geqslant \frac{b_{ii} - \alpha t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| - (1 - \alpha) t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|}{a_{ii}}$$

故

$$\tau(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - \alpha t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| - (1 - \alpha) t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|}{a_{ii}} \right\}$$

(2) 当 $A \circ B$ 可约时,令 $E = (e_{ij})$,其中

$$\begin{cases} e_{ij} = 0, i = j \\ e_{ij} = 1, i \neq j \end{cases}$$

由于 $A, B \in M_n$,从而对任意正数 ε,只要 ε 足够小时,$A - \varepsilon E$ 与 $B - \varepsilon E$ 的所有主子式为正,且 $A - \varepsilon E$,$B - \varepsilon E$ 是不可约的非奇异 M - 矩阵[2],用 $A - \varepsilon E$ 和 $B - \varepsilon E$ 分别替换 A, B,并且令 $\varepsilon \to 0$,由证明情形(1)和连续性可得结论。

特别地,在定理 1 中,当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,可得到如下结果。

定理 2　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格行对角占优 M - 矩阵,$B = (b_{ij}) \in M_n$,$A^{-1} = (\beta_{ij})$,则

$$\tau(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - \frac{1}{2}\Big(t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| + t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|\Big)}{a_{ii}} \right\}$$

推论 1　设 $B = A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格行对角占优 M - 矩阵,$A^{-1} = (\beta_{ij})$,则

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ 1 - \frac{t_j \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| + t_i \sum\limits_{j \neq i} |a_{ji}|}{2a_{ii}} \right\}$$

定理 3　设 $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij}) \in M_n$,且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵,则

$$\tau(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - \alpha t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| - (1 - \alpha) t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|}{1 + \sum\limits_{j \neq i} t_{ji}} \right\}$$

特别地,在定理 3 中,当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,可得到如下结果。

定理 4　设 $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij}) \in M_n$,且 $A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵,则

$$\tau(B \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{b_{ii} - \frac{1}{2}\Big(t_j \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}| + t_i \sum\limits_{j \neq i} |b_{ji}|\Big)}{1 + \sum\limits_{j \neq i} t_{ji}} \right\}$$

同理当 $B = A$ 时,有下面的结论成立。

推论 2　设 $A = (a_{ij}) \in M_n$,$A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵,则

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{a_{ii} - \alpha t_j \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| - (1 - \alpha) t_i \sum\limits_{j \neq i} |a_{ji}|}{1 + \sum\limits_{j \neq i} t_{ji}} \right\}$$

在推论 2 中,当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,可得到如下结果。

定理 5　设 $A = (a_{ij}) \in M_n$,$A^{-1} = (\beta_{ij})$ 是双随机矩阵,则

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{a_{ii} - \frac{1}{2}\Big(t_j \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| + t_i \sum\limits_{j \neq i} |a_{ji}|\Big)}{1 + \sum\limits_{j \neq i} t_{ji}} \right\}$$

3　数值算例

例 1　令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

显然 $A, B \in M_n$,应用 MATLAB 软件计算 $\tau(B \circ A^{-1}) =$

0.1285。

应用文献[6]中定理的估计式,得 $\tau(B^\circ A^{-1}) \geqslant 0.0268$。

应用文献[7]中定理的估计式,得 $\tau(B^\circ A^{-1}) \geqslant 0.0555$。

应用文献[8]中定理2.1中的估计式,得 $\tau(B^\circ A^{-1}) \geqslant 0.0714$。

但应用本文定理2,得 $\tau(B^\circ A^{-1}) \geqslant 0.1027$。

由此例可以看出,本文给出的新估计式在一定条件下改进了前人已有的结果。

例2 令

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

显然 A 是非奇异 $M-$ 矩阵,应用 Fiedler 和 Markham 的猜想[3],得 $\tau(A^\circ A^{-1}) \geqslant 2n^{-1} = 0.5$。

应用文献[5]中定理3.1,得 $\tau(A^\circ A^{-1}) \geqslant 0.6624$。

应用文献[9]中定理3.2,得 $\tau(A^\circ A^{-1}) \geqslant 0.7999$。

应用献[10]中定理3.10,得 $\tau(A^\circ A^{-1}) \geqslant 0.8602$。

应用本文定理5,得 $\tau(A^\circ A^{-1}) \geqslant 0.9324$。

此例说明,本文给出的新估计式在一定条件下改进了 Fiedler 和 Markham 的猜想和文献[5,9-10]的结果。

注 Fiedler 和 Markham 的猜想仅与矩阵和的阶数有关,而矩阵的特征值最主要是与矩阵的元素相关。文献[5,9-10]中给出的估计式,涉及到矩阵和的最小特征值 $\tau(A)$ 和 $\tau(B)$ 的计算,或涉及到和的 Jacobi 迭代矩阵和的谱半径 $\rho(J_A)$ 和 $\rho(J_B)$ 的计算,当矩阵的阶数较大时 $\tau(A)$, $\tau(B)$ 和 $\rho(J_A)$, $\rho(J_B)$ 都是难以计算的,因此应用它们估计 $\tau(B^\circ A^{-1})$ 和 $\tau(A^\circ A^{-1})$ 的下界是难以实现的,但本文给出的这些新估计式仅与矩阵的元素有关系,计算简单易行,且算例表明,这几个估计式所得的界在某些情况下改进了现有估计式的界。

参 考 文 献:

[1] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[2] Berman A,Plemmons R J.Nonegative Matrices in the Mathematices Sciences[M].New York:Acedemic Press, 1979.

[3] Fiedler M,Markham T.An inequality for the Hadamard Product of an matrix and Inversematrix[J].Linear Algebra and its applications,1988,101:1-8.

[4] Cvetkovic L.H-matrix theory and eigenvalue localization [J].Numer Algor,2006,42:229-245.

[5] Li H B,Huang T Z,Shen S Q,et al.Lower bounds for the minimum eigenvalue of an matrix and its inverse[J].Linear Algebra and its applications,2007,420:235-247.

[6] Horn R A,Johnson C R.Topic in Matrix Analysis[M]. New York:Cambridge University Press,1991.

[7] Huang R.Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra and its applications,2008,428:1551-1559.

[8] Li Y T,Li Y Y,Wang R W,et al.Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra and its applications, 2010,432:536-545.

[9] Li Y T,Chen F B,Wang D F.New lower bounds on eigenvalue of the Hadamard product of an matrix and inverse[J].Linear Algebra and its applications,2009, 430:1423-1431.

[10] Li Y T,Liu X,Yang X Y.Some new lower bounds for the minimum eigenvalue of the Hadamard product of an matrix and its inverse[J].Electronic Journal of Linear Algebra,2011,22:630-643.

New Estimations on Eigenvalues of the Hadamard Product About Two M- matrices

ZHOU Ping

(School of Mathematics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract: The Hadamard product of two nonsingular M- matrices is further researched with different situations, and the corresponding new results of $\tau(B^\circ A^{-1})$ and $\tau(A^\circ A^{-1})$ are given. Numerical examples show that the new estimating formulas improve the conjecture of Fiedle and Markham under a certain condition, meanwhile also improve the results in existing literatures

Key words: M- matrix; Hadamard product; minimum eigenvalue; diagonally dominant; doubly stochastic