第 27 卷第 3 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 27 No. 3
2014 年 6 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Jun. 2014
文章编号:1673-1549(2014)03-0094-04 DOI:10.11863/j. suse.2014.03.21

非线性分数阶 Dirichlet 型边值正解的存在唯一性

古传运

(四川文理学院数学与财经学院,四川 达州 635000)

摘　要:研究了一类非线性分数阶 Dirichlet 型边值问题。使用广义的凸算子的不动点定理与 Green 函数的性质和在一定的条件下,得到此边值问题正解的存在唯一性,并能构造一迭代序列去逼近此解。正解的存在性结论得到完善和推广。

关键词:边值问题;广义的凸算子;不动点;正解;存在唯一性

中图分类号:O175.8　　**文献标志码**:A

近年来,非线性分数阶微分方程的研究一直都非常活跃,众多专家学者对此保持着极大的兴趣,并取得了大量的成果。研究源泉主要来源于分数阶微积分自身理论的研究和该理论在物理、化学和经济等方面的广泛应用[1-5]。目前此类研究主要集中于边值问题正解的存在性和多解性,研究的方法主要是上下解方法、Leray – Schauder 理论和锥拉伸和锥压缩不动点定理等[6-13]。从文献的结果显示,关于正解的存在唯一性问题涉及较少。本文将使用广义凸算子的不动点定理研究非线性分数阶微分方程 Dirichlet 型边值问题:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1 < \alpha \leqslant 2$, $D_{0^+}^{\alpha}$ 是 Riemann – Liouville 分数阶导数,且 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续。

若 $u(t) > 0, t\in(0,1)$,且 $u(t)$ 满足方程(1)和边值条件,则称 $u(t)$ 为问题方程(1)的正解。

1　预备知识

定义 1[8]　连续函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann – Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,\mathrm{d}s$$

前提是等式的右端在 $(0,\infty)$ 上是逐点定义的,其中 $\Gamma(\alpha)$ 表示 Gamma 函数。

定义 2[8]　连续函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann – Liouville 分数阶导数定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s$$

其中 $n = [\alpha]+1$,$[\alpha]$ 表示数 α 的整数部分,前提是等式的右端在 $(0,\infty)$ 上是逐点定义的。

引理 1[9]　给定 $h\in C[0,1]$ 且 $1 < \alpha \leqslant 2$,问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + h(t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

的唯一解是

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s, t\in[0,1]$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

这里 $G(t,s)$ 称为边值问题(2)的 Green 函数。

收稿日期:2014-03-03

基金项目:四川省教育厅项目(14ZB0309)

作者简介:古传运(1982-),男,河南周口人,助教,硕士,主要从事非线性泛函分析和微分方程解方面的研究,(E-mail)guchuanyun@163.com

引理 2　引理 1 中的 Green 函数 $G(t,s)$ 具有以下性质：

(1) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是连续函数且 $G(t,s)>0,\forall(t,s)\in(0,1)\times(0,1)$。

(2) $\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-1}s\leqslant G(t,s)\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-2},\forall t,s\in(0,1)$

证明　容易知道性质(1)成立。下面证性质(2)也成立。

(1)当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，由 $t-s\leqslant t-ts$ 知，

$$G(t,s)=\frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-s}^{t-ts}u^{\alpha-2}\mathrm{d}u\geqslant \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}(t-ts)^{\alpha-2}(1-t)s=\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}(1-t)s\geqslant \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-1}s$$

$$G(t,s)=\frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\leqslant \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-2}$$

(2)当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，由(1)可知，结论显然成立。

注：显然，由引理 2，若 $h(t)\geqslant 0,t\in[0,1]$ 则有 $u(t)\geqslant 0$。

本文将要用到的 Banach 空间中的一些材料和不动点定理，详见参考文献[14－16]。

设 E 是实 Banach 空间，θ 为 E 中的零元素，如果(i) $x\in P,\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$，(ii) $x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$，则称非空闭凸集 $P\subset E$ 为 E 中的一个锥。由锥 P 引出 E 中的偏序关系：$x,y\in E,x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$。若 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$，则记作 $x<y$。

若存在常数 $N>0$，使得对任意的 $x,y\in E,\theta\leqslant x\leqslant y$，都有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$，其中 N 叫做锥 P 的正规常数，则锥 P 称为正规的。若 $x\leqslant y$，就有 $Ax\leqslant Ay(Ax\geqslant Ay)$，则称算子 $A:E\to E$ 为递增的(递减的)。

对任意 $x,y\in E$，记号 $x\sim y$ 表示：存在 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$，使得 $\lambda x\leqslant y\leqslant\mu x$，显然，$\sim$ 是一个等价关系。给定 $w>\theta$，记 P_w 为 w 所在的等价类 $P_w=\{x\in E\mid x\sim w\}$，易知当 $\forall w\in P$，有 $P_w\subset P$。

引理 3[16]　设 E 是实 Banach 空间，P 为 E 中的正规锥，$w>\theta$。算子 $A:P_w\to P_w$ 为递减的且满足

$$A(tx)\leqslant t^{-\alpha(t)}Ax,\forall t\in(0,1),x\in P_w$$

其中，$0<\alpha(t)<1,\forall t\in(0,1)$，则 A 在 P_w 中存在唯一不动点 x^*，并且对任意的初始点 $x_0\in P_w$，作迭代序列 $x_n=Ax_{n-1},n=1,2,\cdots$，都有 $\|x_n-x^*\|\to 0(n\to\infty)$。

2　主要结果及证明

假设：

(H_1)固定 $t\in[0,1]$，$f(t,u)$ 关于 u 是递减的。

(H_2)对于 $\forall\lambda\in(0,1)$ 及 $\forall u\in[0,\infty)$，存在 $\varphi(\lambda)\in(\lambda,1]$，使得 $f(t,\lambda u)\leqslant\frac{1}{\varphi(\lambda)}f(t,u)$。

设 $E=C[0,1]$，其中范数

$$\|u\|=\max\{|u(t)|:t\in[0,1]\}$$

则 E 是一实 Banach 空间。同时这个空间可以赋予偏序为

$$\forall u,v\in E,u\leqslant v\Leftrightarrow\forall t\in[0,1],u(t)\leqslant v(t)$$

令 $P=\{u\in E\mid u(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\}$，则 P 是 Banach 空间 E 中的正规锥且正规常数为 1。

定理 1　假设(H_1)，(H_2)成立，且 $f(t,0)>0,t\in[0,1]$，则边值问题(1)在 P_w 中存在唯一的正解 u^*，其中，$w(t)=t^{\alpha-1}(1-t),t\in[0,1]$，且任意的 $u_0\in P_w$，作迭代序列

$$u_n(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\quad(n=1,2,\cdots)$$

从而当 $n\to\infty$ 时有 $u_n(t)\to u^*(t),t\in[0,1]$。

证明　问题(1)的解可以转化为一个与之等价的算子方程的解

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

注意到 $G(t,s)\geqslant 0,t,s\in[0,1]$。由$(\mathrm{H}_1)$可得，$Au(t)\geqslant 0,t\in[0,1]$，且 $A:P\to P$ 是递减的。由(H_2)可得，对 $\lambda\in(0,1)$，有

$$A(\lambda u)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,\lambda u(s))\mathrm{d}s\leqslant \frac{1}{\varphi(\lambda)}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\frac{1}{\varphi(\lambda)}Au(t)$$

于是有

$$A(\lambda u) \leqslant \frac{1}{\varphi(\lambda)} A u, \forall u \in P, \lambda \in (0,1)$$

令

$$\alpha(t) = \frac{\ln \varphi(t)}{\ln t}, t \in (0,1)$$

则有 $\alpha(t) \in (0,1)$, 及

$$A(\lambda u) \leqslant \lambda^{-\alpha(\lambda)} A u, \forall u \in P, \lambda \in (0,1)$$

证 $A: P_w \rightarrow P_w$。

令

$$r = \min\{f(t,0): t \in [0,1]\}$$

$$R = \max\{f(t,1): t \in [0,1]\}$$

则有 $0 < r \leqslant R$, 且由引理2 可得

$$A w(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, w(s)) \mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-1} s f(s,0) \mathrm{d}s \geqslant$$

$$\left[\frac{r(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s \mathrm{d}s\right] t^{\alpha-1}(1-t)$$

$$A w(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, w(s)) \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}(1-t)(1-s)^{\alpha-2} f(s,1) \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\left[\frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mathrm{d}s\right] t^{\alpha-1}(1-t)$$

于是有

$$\left[\frac{r(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s \mathrm{d}s\right] w(t) \leqslant$$

$$A w(t) \leqslant \left[\frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mathrm{d}s\right] w(t)$$

注意到

$$\left[\frac{r(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s \mathrm{d}s\right] > 0$$

$$\left[\frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mathrm{d}s\right] > 0$$

于是有 $Aw \in P_w$。因此 $A: P_w \rightarrow P_w$。从而引理3 的条件满足,于是算子 A 在 P_w 中存在唯一的正解 u^*, 即 $Au^* = u^*$。所以边值问题(1)在 P_w 中唯一的正解是 u^*, 其中, $w(t) = t^{\alpha-1}(1-t), t \in [0,1]$, 且对任意的 $u_0 \in P_w$, 作迭代序列

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u_{n-1}(s)) \mathrm{d}s \quad (n = 1,2,\cdots)$$

从而当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $u_n(t) \rightarrow u^*(t), t \in [0,1]$。

注:本文主要结果中,满足条件(H_1),(H_2)的函数 $f(t,u)$ 在实际中存在很多,如:

$$f(t,u) = (t^3+1)\left[\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}+2} + \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}+2} + \cdots + \frac{1}{u^{\frac{1}{n}}+2} + a\right], t \in [0,1]$$

其中 $n \geqslant 2, a > 0$, 于是

$$f(t,0) = (t^3+1)\left(\frac{n-1}{2} + a\right) > 0, t \in [0,1]$$

参 考 文 献:

[1] Oldham K B,Spanier J.The Fractional Calculus[M].New York:Academic Press,1974.

[2] Miller K S,Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation[M].New York:John Wiley,1993.

[3] Meral F C,Royston T J,Magin R.Fractional calculus in viscoelasticity:An experimental study[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simul,2010,15(4):939-45.

[4] Lin Yezhi,LiuYinping,Li Zhibin.Symbolic computation of analytic approximate solutions for nonlinear fractional differential equations[J].Computer Physics Communications,2013,184(1):130-141.

[5] John T. Katsikadelis Numerical solution of distributed order fractional differential equations[J].Journal of Computational Physics,2014,259:11-22.

[6] Zhang S.Existence of positive solutions for some class of nonlinear fractional equation[J].J Math Anal Appl, 2003,278:136-48.

[7] Al M M,Syam M I,Anwar M N.A collocation-shooting method for solving fractional boundary value problems [J].Commun Nonlinear Sci Numer Simul,2010,15(12): 3814-22.

[8] Kilbas A A, Srivastava H H, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam:Elsevier Science B.V.,2006.

[9] Bai Z,Lü H.Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. J Appl Math,2005,311:495-505.

[10] Chai Guoqing. Existence results of positive solutions for boundary value problems of fractional differential

equations[J].Bound Value Probl,2013(4):109.

[11] Liu Yang.Existence of Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional q-Difference Equation[J]. Applied Mathematics,2013,4(10):1450-1454.

[12] Yang G C,Zhou P F.A new existence result of positive solutions for the Sturm-Liouville boundary value problems[J].Applied Mathematics Letters,2014,29:52-56.

[13] Krasnoselskii M A. Positive Solution of Operator Equation[M].Groningen:Noordhoff,1964.

[14] 王文霞,梁展东.一类非线性算子的不动点定理及其应用[J].数学学报,2005,48(4):789-800.

[15] Zhai Chengbo,Guo Chunmei. On α-convex operators [J].J.Math.Ana1.App1.,2006,316:556-565.

[16] 翟成波,王文霞,张玲玲.一类凹与凸算子的推广[J].数学学报,2008,51(3):529-540.

Existence-uniqueness of Positive Solutions for Nonlinear Fractional Dirichlet-type Boundary Values

GU Chuanyun

(College of Mathematics and Finance-Economics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou 635000, China)

Abstract: This work is concerned with a class of the nonlinear fractional Dirichlet-type boundary value problem. By using the fixed point theorems of generalized convex operators and the properties of the Green function, the existence-uniqueness of positive solutions of this boundary value problem is obtained under certain conditions, and an iterative scheme is constructed to approximate this solution. The existence theory of positive solution is completed and generalized.

Key words: boundary value problem; generalized convex operators; fixed point; positive solution; existence and uniqueness

(上接第 93 页)

[9] 刘春辉,吴 静. R_0 代数(NM 代数)的区间值模糊子代数[J].模糊系统与数学,2012,26(3):77-84.

[10] Atanassov K.Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):90-94.

Intuitionistic Fuzzy Subalgebra of R_0 Algebra

XU Hongwei, ZHANG Youlin, LIU Weifeng

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: Based on the combination of intuitionistic fuzzy set and R_0 algebra, the intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra is defined. The relation between intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra and subalgebra of R_0 algebra is discussed. It is proved that the intersection of intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra is the intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra. The images and inverse images of intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra are defined, and it is proved that the images and inverse images under homomorphism of intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra are respectively intuitionistic fuzzy subalgebra of R_0 algebra. The results further enrich and improve the fuzzy theory of R_0 algebra.

Key words: fuzzy logic; R_0 algebra; intuitionistic fuzzy subalgebra; intuitionistic fuzzy set