

二维时域变形玻恩迭代法及其在地下勘探中的应用

刘广东

(阜阳师范学院物理与电子科学学院, 安徽 阜阳 236037)

摘要:为了方便直接利用时域测量数据,重构地下目标的电参数,将二维频域变形玻恩迭代法(BDIM)发展到时域形式。迭代反演过程中,正问题用时域有限差分(FDTD)法求解;而逆问题的病态特性由吉洪诺夫(Tikhonov)正则化技术抑制。在地下勘探应用算例中,噪声污染被加入,数值结果初步证实了改进方法的可行性。

关键词:变形玻恩迭代法;探地雷达;时域有限差分;吉洪诺夫正则化

中图分类号:TN95

文献标志码:A

地下勘探是指利用探地雷达(ground penetrating radar, GPR)发射高频宽带脉冲电磁波,对地下目标进行探测的地球物理方法,工程上可广泛用于地下水调查、地下固体废物与污染物探测、考古、土壤评价及城市管线探测等许多方面^[1]。其物理基础是目标(object of interest, OI)和背景媒质的电参数(介电常数和电导率)差异。因此,地下勘探属于一类电磁逆散射问题^[2]。

电磁逆散射(也常称为反演、重建、重构等)是一类富有挑战的不适定问题,非线性和病态性是其中的两个主要困难^[2-4]。发展至今,尚未形成一套通用的解决方案。常用的做法是采样线性化近似结合迭代法处理非线性问题^[5],正则化技术抑制病态特性^[6-7]。

从方法论角度,处理电磁逆散射问题,可以从频域进行,相应方法主要有高斯-牛顿法(Gauss-Newton, GN)^[7]、玻恩迭代法(Born iterative method, BIM)^[8]和变形玻恩迭代法(distorted Born iterative method, DBIM)^[9];也可以从时域进行,相应方法主要有正反时间步进法(forward-backward time-stepping, FBTS)^[10]、时域玻恩迭代法(BIM)^[11]和时域高斯-牛顿法(GN)^[12]。研究表明:频域方法对窄带信号而言可行、经济;而对高频宽带脉冲而言,时域方法则显示了信息量大、重建分辨率高等优势^[10]。

为了直接利用时域测量数据,文献[11]将玻恩迭代法(BIM)从频域发展到时域,重建无耗媒质的介电常数分布图像具有超分辨率。

然而,文献[9]指出:变形玻恩迭代法(DBIM)的收敛速度快于玻恩迭代法(BIM),更适合双电参数(介电常数和电导率)同时重建。

利用上述结论,并借鉴文献[11]的思想,本文将二维(two-dimensional, 2-D)变形玻恩迭代法(DBIM)从频域改进到时域,并应用到地下勘探的数值算例中。迭代过程中,每步产生的正问题由时域有限差分法(finite-difference time-domain, FDTD)求解^[13]。

1 问题描述

首先,假设所有媒质是各向同性、线性和无磁的(即相对磁导率 $\mu_r = 1$)。其次,直角坐标系下,设在平行于 z 轴的地下浅层包含若干个柱状异常体,被置于地表(或者近地表)且用平行于 z 轴的线电流源激励的发射天线 T 产生的横磁波(transverse magnetic, TM)照射,产生的总电场由接收天线 R 接收, $x-y$ 横截面如图1所示,其中, S 表示未知电参数的不均匀目标(OI)区域, Ω 表示已知电参数的均匀背景媒质区域。记媒质的相对介电常数和电导率分别为 ε_r 和 σ 。 M 根发射天线和 N 根接收

收稿日期:2014-03-17

基金项目:国家自然科学基金项目(61071022);阜阳师范学院重点基金项目(2011FSKJ01ZD)

作者简介:刘广东(1972-),男,江苏灌云人,副教授,博士,主要从事电磁散射和逆散射方面的研究,(E-mail)liu_guang_dong@126.com

天线分别位于 $r = r_m^T (m = 1, 2, \dots, M)$ 和 $r = r_n^R (n = 1, 2, \dots, N)$ 位置。

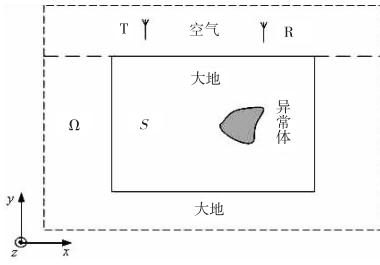


图 1 问题几何模型

1.1 正问题

正问题:已知激励源和媒质的电磁参数,求时域电磁场。

二维(2-D)横磁波(TM)照射下,时域电磁场满足麦克斯韦(Maxwell)方程组^[13]

$$\frac{\partial E_z(r,t)}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_x(r,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z(r,t)}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y(r,t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y(r,t)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(r,t)}{\partial y} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z(r,t)}{\partial t} + \sigma E_z(r,t) + J_z(r,t) \quad (3)$$

其中,位置矢量 $r = (x, y)$, μ_0 和 ε_0 分别表示真空磁导率和介电常数, J_z 表示激励电流源。

本文采用时域有限差分法(FDTD)离散媒质空间,周围采用卷积完全匹配层(Convolution perfectly matched layer, CPML)吸收边界条件^[13]。相关实现细节见文献[13]。

无散射体(目标)存在时,依次激活 r_m^T 处各发射天线,测量(或 FDTD 仿真)获得并存储:(1) r_n^R 处各接收天线上的时域入射电场 $E_z^{inc}(r_n^R, r_m^T, t)$; (2) 目标区的时域入射电场 $E_z^{inc}(r, r_m^T, t)$, $r \in S$ 。

有散射体(目标)存在时,依次激活 r_m^T 处各发射天线,测量(或 FDTD 仿真)获得并存储 r_n^R 处各接收天线上的时域总电场 $E_z(r_n^R, r_m^T, t)$ 。则目标产生的时域散射电场为

$$E_z^{scat}(r_n^R, r_m^T, t) = E_z(r_n^R, r_m^T, t) - E_z^{inc}(r_n^R, r_m^T, t) \quad (4)$$

1.2 逆问题

逆(或反)问题:已知测量(或仿真)的时域电磁场和均匀背景媒质的电参数,求不均匀目标的电参数。

首先,利用快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT),获得频域复值的散射电场 \dot{E}_z 为:

$$\dot{E}_z^{scat}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{scat}(r, t) e^{-j\omega t} dt \triangleq FFT\{E_z^{scat}(r, t)\} \quad (5)$$

其中, j 表示虚数单位,角频率 $\omega = 2\pi f$, f 表示频率。

其次,定义复值的目标函数为:

$$\dot{O}(r) \triangleq \dot{\varepsilon}_r(r) - \dot{\varepsilon}_r^b \quad (6)$$

其中,目标和背景的复值相对介电常数 $\dot{\varepsilon}_r(r)$ 、 $\dot{\varepsilon}_r^b$ 分别为

$$\dot{\varepsilon}_r(r) \triangleq \varepsilon_r(r) - j \frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0 \omega} \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}_r^b \triangleq \varepsilon_r^b - j \frac{\sigma^b}{\varepsilon_0 \omega} \quad (8)$$

其中, $\varepsilon_r(r)$ 和 $\sigma(r)$ 分别表示目标的实值相对介电常数和电导率, ε_r^b 和 σ^b 分别表示背景媒质的实值相对介电常数和电导率。

类似于文献[11],由于不均匀散射体(目标)的存在,可以导出产生的频域复值散射场满足:

$$\dot{E}_z^{scat}(r_n^R, r_m^T, \omega) = k_0^2 \int_S \dot{G}^{inh}(r_n^R, r', \omega) \dot{O}(r') \dot{E}_z(r', r_m^T, \omega) dr' \quad (9)$$

其中, k_0 表示真空实值波数,利用对易原理,不均匀目标区的格林(Green)函数满足^[9]:

$$\dot{G}^{inh}(r_n^R, r', \omega) = \frac{1}{j\omega\mu_0 I(\omega)} \dot{E}_z(r', r_n^R, \omega) \quad (10)$$

其中, $I(\omega)$ 表示激励时域脉冲对应的频域形式。

离散计算空间为 $L = L_x L_y$ 个网格,其中 L_x 、 L_y 分别表示 x 和 y 方向剖分的网格数。采用脉冲基函数,展开目标函数为:

$$\dot{O}(r) = \sum_{l=1}^L \dot{a}_l p_l(r) \quad (11)$$

其中, \dot{e}_l 和 \dot{a}_l 为复值展开系数,脉冲基函数定义为^[11]:

$$p_l(r) \triangleq \begin{cases} 1, & (r \in s_l) \\ 0, & (r \notin s_l) \end{cases} \quad (12)$$

其中, s_l 表示第 l 个离散网格。这样,积分方程(8)可转化为复值的矩阵形式

$$\dot{e} = K \dot{a} \quad (13)$$

其中, $J \times 1$ 复值列向量 \dot{e} 定义为:

$$\dot{e} \triangleq [\dot{E}_z^{scat}(r_1^R, r_1^T, \omega_1), \dots, \dot{E}_z^{scat}(r_n^R, r_m^T, \omega_w), \dots, \dot{E}_z^{scat}(r_N^R, r_M^T, \omega_w)]^t \quad (14)$$

这里 $J = MNW$, W 表示采样频点数,上角标 t 表示转置运算(下文同); $J \times L$ 复值矩阵 K 的元素 $K_{j,l}$ 为:

$$K_{j,l} = k_0^2 \int_{s_l} \dot{G}^{inh}(r_n^R, r', \omega_w) \dot{E}_z(r', r_m^T, \omega_w) p_l(r') dr' \quad (15)$$

$L \times 1$ 复值列向量 \dot{a} 定义为:

$$\dot{a} = [\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots, \dot{a}_l, \dots, \dot{a}_L]^t \quad (16)$$

2 逆问题解法

为了处理逆问题的非线性,本文将矩阵方程(13)转化为最小化问题迭代求解,迭代初始,采用玻恩近似

(Born approximation, BA)线性化逆问题^[11]。

为了抑制逆问题的病态特性,引入一阶吉洪诺夫(Tikhonov)正则化技术^[14]。基于最小二乘准则,定义最小化问题的泛函为:

$$F \triangleq \dot{K}a - \dot{e}_2^2 + \gamma Ra_2^2 \quad (17)$$

其中,上、下标 2 分别表示平方、 L_2 范数运算, R 表示 $L \times L$ 正则化矩阵, γ 表示正的正则化参数,其选取办法可以参考文献[11]。最小化问题等价于法方程:

$$(\dot{K}^H \dot{K} + \gamma R^H R) \dot{a} = \dot{K}^H \dot{e} \quad (18)$$

其中,上角标 H 表示复共轭转置运算。该方程可用共轭梯度法(conjugate gradient, CG)迭代求解^[15]。

定义第 i 步迭代时的相对剩余误差为:

$$e(i) \triangleq \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T |E_{z,comp}^{scat} - E_{z,meas}^{scat}|^2 dt}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \int_0^T |E_{z,meas}^{scat}|^2 dt} \quad (19)$$

其中, $E_{z,comp}^{scat}$ 表示第 i 步迭代的时域计算散射电场, T 表示激励源辐照时间, $E_{z,meas}^{scat}$ 表示时域测量散射电场。 $i = 1, 2, \dots, i_{max}$, i_{max} 表示最大迭代次数,并记迭代收敛的误差阈值为 e^{th} 。

时域变形玻恩迭代法(DBIM)的计算流程如图2所示。

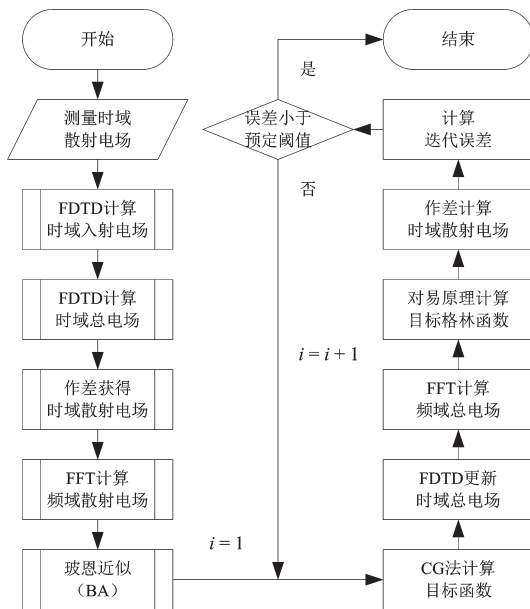


图2 时域 DBIM 计算流程图

3 应用算例

为了检验本文方法的性能,应用它进行地下勘探,即利用 GPR 测量的时域电场重建地下二维($x - y$ 截面)目标的相对介电常数和电导率分布。地质雷达测量的几何结构如图3所示。其中,粗实线正方形区域为电

参数未知的目标区域(目标区域中含有四个等大的正方形异常体 S1、S2、S3 和 S4,边长等于 0.45 m),正方形边长等于 4.50 m,周围为已知电参数的背景媒质(空气的相对介电常数和电导率分别为 $\epsilon_r = 1, \sigma = 0$; 大地的相对介电常数和电导率分别为 $\epsilon_r = 4, \sigma = 1.0 \times 10^{-3}$ S/m),边界间距 1.50 m。

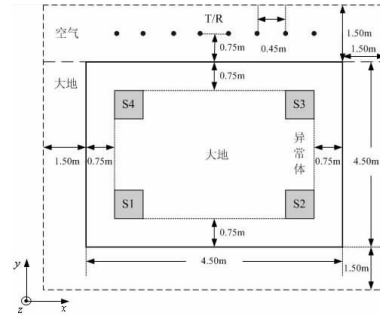


图3 地质雷达测量的几何结构

图3中,黑色圆点表示 GPR 的 8 个均匀分布的天线阵元(点模型),相邻间距为 0.45 m,置于水平地面上方 0.75 m,各阵元被依次激活,当其中某个阵元用作发射天线时,则其余 7 个用作接收天线,即 $M = 8, N = 7$ 。激励的时域信号选为

$$I(t) = \sin(2\pi f_{c1}t) + 0.3\sin(2\pi f_{c2}t), \quad (0 \leq t \leq 40 \text{ ns}) \quad (20)$$

其中, $f_{c1} = 20 \text{ MHz}, f_{c2} = 60 \text{ MHz}$ 。即辐照时间 $T = 40 \text{ ns}$, 频点数 $W = 2$ 。

迭代过程中,每步产生的正问题由时域有限差分法(FDTD)求解^[13],剖分网格尺寸为 $\Delta x = \Delta y \triangleq \Delta = 0.15 \text{ m}$, 时间步长为 $\Delta t = \frac{\Delta}{(2c_0)}$, 其中 c_0 为真空光速。虚线区域周围由 10 层卷积完全匹配层(CPML)吸收边界截断^[13]。

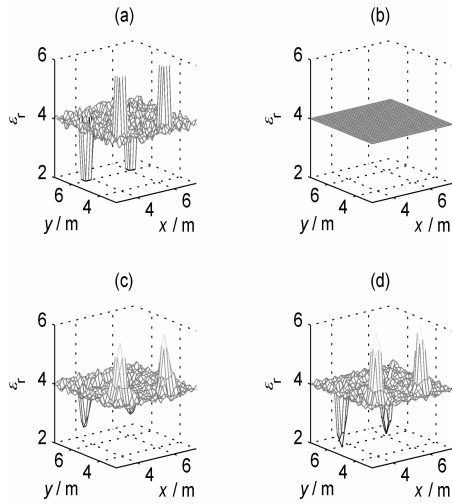
本文利用 FDTD 法仿真时域电场代替测量数据。此时,目标区域中各异常体的电参数见表1。为了让仿真更接近真实测量,避免过于乐观的重建,特作几点尝试:(1)剖分采用两倍精细网格;(2)在仿真数据中加入均匀分布的随机噪声^[3],信噪比取 20 dB;(3)大地中除了明显的异常体以外,可能存在一些电参数差异较小的杂质,为了考察它们的影响,取目标区域的电特性参数在 $1 \pm 5\%$ 的范围内随机变化。

表1 各散射体的电参数

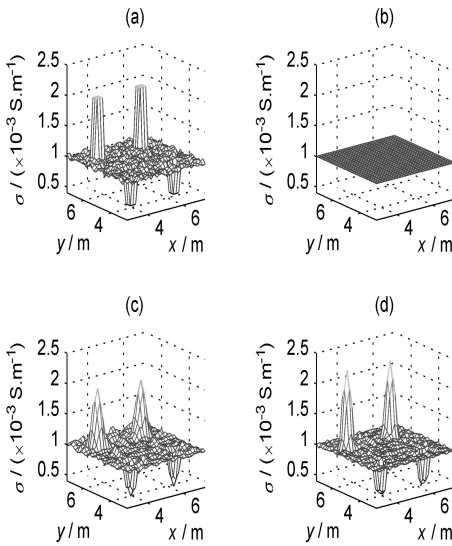
参数类别	S1	S2	S3	S4
ϵ_r	6	6	2	2
$\sigma / \text{S.m}^{-1}$	0.5×10^{-3}	0.5×10^{-3}	2.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}

逆问题求解过程中,选用 Polak - Ribière - Polyak (PRP)共轭梯度法(CG)^[15]求解方程(18),正则化矩阵

R 取为单位矩阵 I , 正则化参数取为 $\gamma = 0.001$ 。



(a) 真实值 (b) 迭代初值 (c) 30 次迭代 (d) 60 次迭代
图 4 相对介电常数 ϵ_r



(a) 真实值 (b) 迭代初值 (c) 30 次迭代 (d) 60 次迭代
图 5 电导率 σ

按照图 2 所示的计算流程, 迭代求解目标函数, 处理的部分结果分别如图 4 ~ 图 6 所示。其中, 图 4 和图 5 分别给出了相对介电常数 ϵ_r 和电导率 σ 的真实分布以及在迭代次数分别为 $i = 0, 30$ 和 60 时的重建结果, 图 6 是相对误差随迭代次数的变化关系。其中, 第 30 和 60 次迭代的相对误差分别为 0.18% 和 0.03%。

因此, 可以得出: (1) 总体上, 2D 时域 DBIM 应用到该具体算例是收敛的, 收敛速度先快后慢; 且随着迭代次数的增加, 相对误差逐渐减小, 重建精度逐渐提高 (当然, 迭代次数越多, 计算耗时也越长, 实际的工程应用中, 可以选择一个重建精度与实时重建的合理折中)。

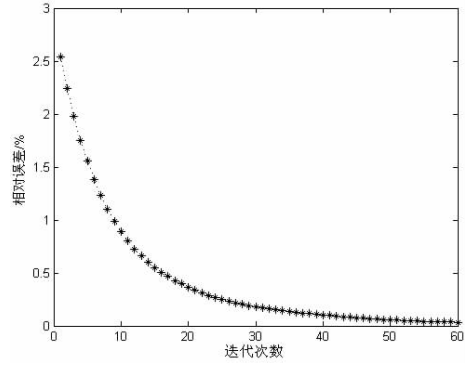


图 6 不同迭代次数的相对误差

(2) 当迭代次数 $i = 60$ 时, 尽管四个主要散射体 $S1, S2, S3$ 和 $S4$ 的电特性参数高于或低于背景媒质 (大地), 但均收到了较好的重建效果, 较好地重现了它们的形状、尺寸、位置信息 (各参数和相应的真实值尚有一定的差异, 适当增加仿真时间步数或者适当加大迭代次数是可能的解决方法)。(3) 就 4 个主要散射体的位置而言, $S1$ 和 $S2$ 对比 $S3$ 和 $S4$, 前者的重建效果略差于后者, 可能是由于 $S1$ 和 $S2$ 位于地下较深位置, 距离 GPR 较远, 信号在大地中经受衰减, 来自 $S1$ 和 $S2$ 的散射信号较弱所致 (解决方法是适当降低激励源的频率。当然, 这也同时降低了重建的分辨率, 在实际的工程应用中, 应该选择一个检测深度和重建分辨率的合理折中)。

综合起来, 由于测量视角的受限和测量数据的有限, 增加了逆问题的病态性质, 尽管如此, 在噪声环境下, 在电参数假设为 $1 \pm 5\%$ 随机变化的大地中, 地下 (异常体) 目标仍被成功地探测到。这可能得益于本文时域 DBIM 的鲁棒性和正则化技术等因素 (当然, 正则化方案已有多种^[16], 正则化参数的选择也是个难题, 基本思路是: 根据具体问题, 通过数值测试确定最优参数)。

4 结束语

利用 GPR 发射高频宽带脉冲进行地下目标勘探, 并进行时域反演是一种重要的地球物理方法, 在水文地质、工程地质、地质调查和军事探测等领域具有良好的应用前景。

本文将二维 (2-D) 变形玻恩迭代法 (DBIM) 从频域改进到时域。迭代过程中, 正问题由时域有限差分法 (FDTD) 求解, 经正则化的逆问题由快速傅里叶变换 (FFT) 结合共轭梯度法 (CG) 求解。

地下勘探的数值结果显示: 目标的介电常数和电导率均被成功地重建, 再现了散射体的位置、尺寸和形状等目标信息。本文的双参数反演方法丰富了宽带高频

电磁脉冲在有耗媒质中的传播理论,拓展了电磁勘探方法,体现了一定的工程应用价值。

当然,诸多问题尚待进一步研究:(1)本文方法能否应用于其它领域(如微波医学成像);(2)其它正则化方案(如自适应正则化)的性能;(3)推广到三维情形。

参考文献:

- [1] 郑圣谈,曾昭发,刘四新,等.宽带高频电磁场数据反演方法研究[J].地球物理学报,2008,51(1):266-272.
- [2] Zhang Peng,Zhang Xiaojuan,Fang Guangyou. Comparison of the imaging resolutions of time reversal and back-projection algorithms in EM inverse scattering[J].IEEE Geosci.Remote Sens.Lett.,2013,10(2):357-361.
- [3] 刘广东,张业荣.一种处理分层有耗色散介质的时域逆散射方法[J].电子学报,2011,39(12):2856-2862.
- [4] 刘广东.乳腺癌检测的时域微波成像算法研究[D].南京:南京邮电大学,2011.
- [5] Gennarelli G,Soldovieri F. A linear inverse scattering algorithm for radar imaging in multipath environments [J].IEEE Geosci.Remote Sens.Lett.,2013,10(5):1085-1089.
- [6] 张建军,王芹.二值图像恢复的一个非线性正则化方法[J].应用科学学报,2009,27(1):74-78.
- [7] Mojabi P,LoVetri J. A prescaled multiplicative regularized Gauss-Newton inversion[J].IEEE Trans. Antennas Propag.,2011,59(8):2954-2963.
- [8] Wang Y M,Chew W C. An iterative solution of two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem [J].Int. J. Imaging Syst.Technol.,1989,1(1):100-108.
- [9] Chew W C,Wang Y M. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method[J].IEEE Trans.Med.Imaging,1990,9(2):218-225.
- [10] Takenaka T,Jia H,Tanaka T. Microwave imaging of electrical property distributions by a forward-backward time-stepping method[J].J.Electromagn. Waves Appl.,2000,14(12):1609-1626.
- [11] Ali M A,Moghaddam M.3D nonlinear super-resolution microwave inversion technique using time-domain data [J].IEEE Trans. Antennas Propag.,2010,58(7):2327-2336.
- [12] 刘广东,张开银.二维电磁逆散射问题的时域高斯-牛顿反演算法[J].物理学报,2014,63(3):116-130.
- [13] Taflove A,Hagness S C. Computational electrodynamics:The finite-difference time-domain method(3rd ed.) [M].Artech:House press,2005.
- [14] Tikhonov A N,Arsenin V Y. Solutions of ill-posed problems[J].SIAM Rev,1979,21(2):266-267.
- [15] Dai Y H. A family of hybrid conjugate gradient methods for unconstrained optimization[J].Math. Comput.,2003,17(2):1317-1328.
- [16] Mojabi P,LoVetri J. Overview and classification of some regularization techniques for the Gauss-Newton inversion method applied to inverse scattering problems[J].IEEE Trans. Antennas Propag.,2009,57(9):22658-22665.

Two-Dimensional Time-Domain Distorted Born Iterative Method and Its Application in Underground Exploration

LIU Guangdong

(School of Physical and Electronics, Fuyang Teachers College, Fuyang 236037, China)

Abstract: The two-dimensional (2-D) distorted Born iterative method (DBIM) is developed from frequency domain to time domain in order to reconstruct the dielectric parameters of the underground object and directly use the time-domain measured data. In the iterative inversion process, the forward problem is solved by the finite-difference time-domain (FDTD) method, while the ill-peculiarity of the corresponding inverse problem is restrained by Tikhonov's regularization technique. Furthermore, the noise pollution is considered in a numerical example of underground exploration application, and the numerical results preliminarily demonstrate the feasibility of modified algorithm.

Key words: distorted Born iterative method (DBIM); ground penetrating radar (GPR); finite-difference time-domain (FDTD); Tikhonov's regularization