第 26 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 26 No. 6
2013 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2013
文章编号:1673-1549(2013)06-0090-03 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.06.021

t – Rickart 模的性质研究

霍志佳

(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

摘 要:给出 t – Rickart 模的概念,称模 M_R 是 t – Rickart 模,如果 S 中的任意元素在 M 中的 t – 零化子是 M 的直和项,其中 S 是它的自同态环。给出 t – Rickart 模的一些刻画,并研究这类模的基本性质,证明了 t – Rickart 模的每个直和项仍是 t – Rickart 模。

关键词:t – Rickart 模;t – 零化子;t – Baer 模;Rickart 模

中图分类号:0153.3 **文献标志码**:A

引 言

Baer 模是一类非常重要的模,近年来得到了大量的研究[1-4]。称模 M 是 Baer 模[1],如果对 $\forall I \leqslant_S S$, $r_M(I) = eM$, 其中 $e^2 = e \in S$。作为 Baer 模的推广,Rickart 模的概念首先是由 Lee G、Rizvi S T 和 Roman C S 提出的,并得到许多重要的结论[5-7]。称模 M 是 Rickart 模[5],如果对任意 $\forall \varphi \in S, r_M(\varphi) = eM$,其中,$e^2 = e \in S$, $Z(M)$ 是 M 的奇异子模,且 $Z_2(M)$ 可由 $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$ 定义。利用它,Sh. Asgari 和 A. Haghany 提出了 t – Baer 模的概念。称 M 是 t – Baer模[8],如果对 $\forall I \leqslant_S S$, $t_M(I) = eM$, 其中 $e^2 = e \in S$。受文献[8]的启发,本文引入 t – Rickart 模的概念,并研究这类模的一些基本性质。

1 预备知识

本文中, R 都是指有单位元的结合环,所有的模都是右 R – 模, $S = End(M)$ 表示 M 的自同态环,因此 M 可被看作左 S – 右 R – 双模,对 $\forall \varphi \in S, Ker(\varphi)$ 表示 φ 的核, $\mathrm{Im}\varphi$ 表示 φ 的象, $N \subseteq M$, $N \leqslant M, N \ll M$, $N \leqslant_e M$, $N \leqslant^{\oplus} M$ 分别表示 N 是 M 的子集,子模,小子模,本质子模,直和项。$E(M)$, $Z(M)$ 分别表示 M 的内射包,奇异子模。Z_n 表示 n/nZ。此外, $I \leqslant_S S$ 表示 I 是 S 的左理想, $r_M(I) = \{m \in M \mid \mathrm{Im} = 0\}$,

$$r_S(I) = \{\varphi \in S \mid I\varphi = 0\}, t_M(I) = \{\varphi \in S \mid \mathrm{Im} \leqslant Z_2(M)\}$$

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0, I \leqslant_e R\}, \text{对 } \forall \varphi \in S$$

$$r_M(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi m = 0\}, t_M(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi m \in Z_2(M)\}$$

2 主要结论

定义 1[1] 称模 M 是 Baer 模,如果 S 中的任意左理想在 M 中的右零化子是由 S 中的幂等元生成,即,对 $\forall I \leqslant_S S, r_M(I) = eM$, 其中 $e^2 = e \in S$。等价地说,对 $\forall I \leqslant_S S, r_M(I) \leqslant^{\oplus} M$。

定义 2[5] 称模 M 是 Rickart 模,如果 S 中的任意元素在 M 中的右零化子是由 S 中的幂等元生成,即,对 $\forall \varphi \in S$, $r_M(\varphi) = eM$, $e^2 = e \in S$。

定义 3[8] 称模 M 是 singular 模,如果 $Z(M) = M$;称 M 是 nonsingular 模,如果 $Z(M) = 0$;称 M 是 Z_2 – torsion 模,如果 $Z_2(M) = M$。

定义 4[8] 称模 M 是 t – Baer 模,如果 S 中的任意左理想在 M 中的 t – 零化子是 M 的直和项,即,对 $\forall I \leqslant_S S$, $t_M(I) \leqslant^{\oplus} M$。

定义 5 称模 M 是 t – Rickart 模,如果 S 中的任意

收稿日期:2013-06-28
作者简介:霍志佳(1987-),女,陕西榆林人,硕士生,主要从事环与模范畴和同调代数方面的研究,(E-mail)18628669551@163.com

元素在 M 中的 t－零化子是 M 的直和项,即对 $\forall\varphi\in S$, $t_M(\varphi)\leqslant^{\oplus}M$, 等价地说,对 $\forall\varphi\in S, t_M(\varphi)=eM$, 其中 $e^2=e\in S$。

命题 1　(1)每个半单模都是 t－Rickart 模。

(2)每个 Z_2 －torsion 模是 t－Rickart 模。

(3)设 M 是 nonsingular 模,则 M 是 t－Rickart 模当且仅当 M 是 Rickart 模。

(4)若 M 是 t－Baer 模,则 M 是 t－Rickart 模。

证明　(1)显然。(半单模的任意直和项都是它的直和项[9])

(2)设 M 是 Z_2 －torsion 模,则 $Z_2(M)=M$, 所以对 $\forall\varphi\in S, t_M(\varphi)=\{m\in M\mid\varphi m\in Z_2(M)\}=M\leqslant^{\oplus}M$ 所以 M 是 t－Rickart 模。

(3)设 M 是 nonsingular 模,则 $Z_2(M)=0$, 所以 $t_M(\varphi)=\{m\in M\mid\varphi m\in Z_2(M)\}=\{m\in M\mid\varphi m=0\}=r_M(\varphi)$ 则 M 是 t－Rickart 模当且仅当 M 是 Rickart 模。

(4)设 M 是 t－Baer 模, $S=End(M)$, $\forall\varphi\in S$, 令 $I=(\varphi)=S\varphi$, 则易证 $t_M(I)=t_M(\varphi)$, 事实上, $\forall m\in t_M(I)$, 有 $\mathrm{l}m\leqslant Z_2(M)$, 即, $\sum_{f_i\in I}f_im\leqslant Z_2(M)$, 令 $f_1=\varphi, f_i=0, 1\neq i\in\Lambda$, 则 $\sum_{f_i\in I}f_im=\varphi m\in Z_2(M)$, 所以 $m\in t_M(\varphi)$, 所以 $t_M(I)\subseteq t_M(\varphi)$, 另一方面,对 $\forall m\in t_M(\varphi)$, 则 $\varphi m\in Z_2(M)$, 因为 $Z_2(M)$ 是 M 的子模,那么,对 $\forall s_i\in S$, 令 $f_i=s_i\varphi$, 则 $f_im=s_i(\varphi m)\in Z_2(M)$, 因此 $\mathrm{l}m=\sum_{f_i\in I}f_im\leqslant Z_2(M)$。所以 $m\in t_M(I)$, 所以 $t_M(\varphi)\subseteq t_M(I)$, 因此 $t_M(\varphi)=t_M(I)$, 那么由 M 是 t－Baer 模, $t_M(I)\leqslant^{\oplus}M$, 所以 $t_M(\varphi)\leqslant^{\oplus}M$, 所以 M 是 t－Rickart 模。

定义 6　称模 M 有直和项交性质,如果对于 M 的任意两个直和项的交仍是 M 的直和项,简称模 M 有 SIP 性质。称模 M 有强直和交性质,如果对于 M 的任意一族直和项的交仍是 M 的直和项,简称模 M 有 SSIP 性质。

引理 1[4]　对于模 M 来说,以下等价:

(1) M 是 t－Baer 模。

(2) M 的包含 $Z_2(M)$ 的直和项有 SSIP 性质,且对所有的 $\varphi\in S, \varphi^{-1}(Z_2(M))\leqslant^{\oplus}M$。

推论 1　设 M 是模,则 M 是 t－Baer 模当且仅当 M 是 t－Rickart 模,且 M 的包含在 $Z_2(M)$ 中的直和项有 SSIP 性质。

证明　必要性 设 M 是 t－Baer 模,则由命题 1(4), M 是 t－Rickart 模,且由引理 1(2), M 的包含在 $Z_2(M)$ 的直和项有 SSIP 性质。

充分性 设 M 是 t－Rickart 模, $S=End(M)$, $\forall I\leqslant_S S$, 有 $t_M(I)=\cap t_M(\varphi)$, 则由 M 是 t－Rickart 模,则 $t_M(\varphi)\leqslant^{\oplus}M$, 且对 $\forall m\in\mathbf{Z}_2(M), \varphi m\in\mathbf{Z}_2(M)$, 因此 $Z_2(M)\subseteq t_M(\varphi)$, 则由假设, M 的包含在 $Z_2(M)$ 中的直和项有 SSIP 性质,所以, $\cap t_M(\varphi)\leqslant^{\oplus}M$, 那么 $t_M(I)\leqslant^{\oplus}M$, 因此 M 是 t－Baer 模。

例 1　$Z\oplus Z_2$ 作为 Z－模是 t－Rickart 模,但不是 Rickart 模。

证明　文献[8]中已经证明模 $Z\oplus Z_2$ 是 t－Baer 模,且由推论 1,得 $Z\oplus Z_2$ 是 t－Rickart 模,但不是 Rickart 模,因为 $\exists\varphi\in End(Z\oplus Z_2)$, $\varphi(n,\bar{m})=(0,\bar{n})$, 则 $Ker(\varphi)=2Z\oplus Z_2$ 不是 $Z\oplus Z_2$ 的直和项,所以 $Z\oplus Z_2$ 不是 Rickart 模。

定理 1　t-Rickart 模的任意直和项仍是 t－Rickart 模[8]。

证明　设 M 是 t－Rickart 模, $S=End(M)$, N 是 M 的直和项,且设 $N=eM, e^2=e\in S$, $\forall\varphi\in End(N)$, 则有 $t_N(\varphi)=\{m\in N\mid\varphi m\in Z_2(N)\}$, 易证 $t_M(\varphi e)=(eM\cap t_N(\varphi))\oplus(1-e)M=t_N(\varphi)\oplus(1-e)M$。事实上, $\forall m\in t_M(\varphi e)$, 则 $\varphi em\in Z_2(M)$, 又因为 $em\in eM=N$, 则 $\varphi em\in\varphi N\subseteq N$, 那么 $\varphi em\in N\cap Z_2(M)=Z_2(N)$, 所以 $em\in t_N(\varphi)\cap eM$, 因此, $m=em+(1-e)m\in(eM\cap t_N(\varphi))\oplus(1-e)M=t_N(\varphi)\oplus(1-e)M$。另一方面,由于 $\varphi e(t_N(\varphi)\oplus(1-e)M)\subseteq Z_2(M)$, 那么 $t_N(\varphi)\oplus(1-e)M\subseteq t_M(\varphi e)$, 因此, $t_M(\varphi e)=t_N(\varphi)\oplus(1-e)M$, 又因为 M 是 t－Rickart 模,则 $t_M(\varphi e)\leqslant^{\oplus}M$, 那么 $t_N(\varphi)\leqslant^{\oplus}M$, 所以 $t_N(\varphi)\leqslant^{\oplus}N$, 所以 N 是 t－Rickart 模。

定理 2　模 M 是 t－Rickart 模当且仅当 $M=Z_2(M)\oplus M'$, 且 M' 是(非奇异)Rickart 模。

证明　必要性 先证明 $Z_2(M)\leqslant^{\oplus}M$, 设 M 是 t－Rickart 模, $\forall\varphi\in S$, 有 $t_M(S\varphi)=t_M(\varphi)$。当 φ 是恒等映射时,即, $\varphi=1_M:M\to M$, 有 $t_M(S1)=t_M(1)=Z_2(M)$, 因为 M 是 t－Rickart 模,则 $t_M(1)\leqslant^{\oplus}M$, 所以 $Z_2(M)\leqslant^{\oplus}M$, 且设 $M=Z_2(M)\oplus M'$, 下面证明 M' 是 Rickart 模,设 $\forall\varphi\in\bar{S}=End(M')$, 则令 $\varphi'=\varphi\oplus 1_{Z_2(M)}:Z_2(M)\oplus M'\to Z_2(M)\oplus M'$, 则有 $t_M(\varphi')=r_{M'}(\varphi)\oplus Z_2(M)$, 事实上, $\varphi'(r_{M'}(\varphi)\oplus Z_2(M))=(\varphi\oplus 1_{Z_2(M)})(r_{M'}(\varphi)\oplus Z_2(M)=1_{Z_2(M)}(Z_2(M))\subseteq Z_2(M)$, 所以 $r_{M'}(\varphi)\oplus Z_2(M)\subseteq t_M(\varphi')$, 另一方面,设 $m=m_1+m_2\in t_M(\varphi')$, $m_1\in M'$, $m_2\in Z_2(M)$。那么, $\varphi'(m)=(\varphi\oplus 1_{Z_2(M)})(m_1+m_2)=\varphi m_1+m_2\in Z_2(M)$。因为 $\varphi m_1\in M'$, 且 $M'\cap Z_2(M)=0$, 所以 $\varphi m_1=0$, 那

么 $m_1 \in r_{M'}(\varphi)$, $m_2 \in Z_2(M)$, 所以 $t_M(\varphi') \subseteq r_{M'}(\varphi) \oplus Z_2(M)$, 因此 $t_M(\varphi') = r_{M'}(\varphi) \oplus Z_2(M)$, 又因为 M 是t - Rickart 模,则 $t_M(\varphi') = r_{M'}(\varphi) \oplus Z_2(M) \leqslant^{\oplus} M$, 所以 $r_{M'}(\varphi) \leqslant^{\oplus} M$, 那么 $r_{M'}(\varphi) \leqslant^{\oplus} M'$, 因此 M' 是 Rickart 模。

充分性 设 $M = Z_2(M) \oplus M'$, $\forall \varphi \in S, S = End(M)$, 则令 $\varphi' = \pi\varphi | M': M' \to M'$, 则有 $t_M(\varphi) = r_m(\varphi')^{\oplus} Z_2(M)$, 事实上, $\varphi(r_{M'}(\varphi') \oplus Z_2(M)) = \varphi(Z_2(M)) \subseteq Z_2(M)$, 所以 $r_{M'}(\varphi') \oplus Z_2(M) \subseteq t_M(\varphi)$, 另一方面,设 $\forall m = m_1 + m_2 \in t_M(\varphi)$, $m_1 \in M'$, $m_2 \in Z_2(M)$, 则 $\varphi(m) = \varphi(m_1 + m_2) \in Z_2(M)$, 所以 $\pi\varphi(m_1 + m_2) = 0$, 即, $\varphi' m_1 + \varphi' m_2 = 0$, 则 $\varphi' m_1 = 0$, 那么 $m_1 \in r_{M'}(\varphi')$, 则 $t_M(\varphi) \subseteq r_{M'}(\varphi')$, 因此 $t_M(\varphi) = r_m(\varphi')^{\oplus} Z_2(M)$, 又因为 M' 是 Rickart 模, 所以 $r_{M'}(\varphi') \leqslant^{\oplus} M'$, 那么 $r_{M'}(\varphi') \oplus Z_2(M) \leqslant^{\oplus} M' \oplus Z_2(M) = M$, 那么 $t_M(\varphi) \leqslant^{\oplus} M$, 因此, M 是 t - Rickart 模。

推论 2 如果 M 是 t - Rickart 模,则 $M/Z_2(M)$ 是 Rickart 模; 但反之不成立。

证明 设 M 是 t - Rickart 模,则由定理 2, $M = Z_2(M) \oplus M'$, 且 M' 是 Rickart 模,又因为 $M/Z_2(M) \cong M'$, 所以 $M/Z_2(M)$ 是 Rickart 模,但反之不成立。事实上,设 $M = \prod_p Z_p$ 是定义在一切素数集上的模,则 $Z(M) = \oplus_p Z_p$, 因为 Z 是奇异子模,所以 $Z_2(M) = \oplus_p Z_p$, 由文献[1]中命题 2.10 和引理 2.14, $M/Z_2(M)$ 是 Baer 模,则 $M/Z_2(M)$ 是 Rickart 模,另一方面,设 $Z_2(M) \leqslant^{\oplus} M$, 且设 $M = Z_2(M) \oplus M''$, 则 $M'' \cong M/Z_2(M)$ 是可除的 Z - 模,与假设矛盾! 所以 $Z_2(M)$ 不是 M 的直和项,因此 M 不是 t - Rickart 模。

因此,由上述例 1 和推论 2, t - Rickart 模是介于 Rickart 模和商模 $M/Z_2(M)$ 是 Rickart 模的模之间的一类模。

命题 2 对于模 M 来说,以下等价:

(1) M 是 t - Rickart 模。

(2) 对 $\forall \varphi \in S$, 短正合列 $0 \to t_M(\varphi) \to M \to M/Z_2(M) \to 0$ 可分。

证明 设 M 是模,则对 $\forall \varphi \in S$, 命题(2) 中的短正合列在点 M 处可分当且仅当 $t_M(\varphi) \leqslant^{\oplus} M$, 即,当且仅当 M 是 t - Rickart 模。

参考文献:

[1] Rizvi S T,Roman C S.Baer and Quasi-Baer Modules[J].Comm Algebra,2004,32(1):103-123.

[2] Rizvi S T,Roman C S.On direct sums of Baer modules[J].J Algebra,2009,321:4005-4027.

[3] Tütüncü D K.Tribak R.On Dual Baer modules[J].Glasg Math J,2010,52(2):261-269.

[4] Liu Q,Ouyang B Y,Wu T S.Principally quasi-Baer modules[J].J Math Res Exposition,2009,29(25):823-830.

[5] Lee G,Rizvi S T,Roman C S.Rickart modules[J].Comm Algebra,2010,38(11):4005-4027.

[6] Lee G,Rizvi S T,Roman C S. Direct sums of Rickart Modules[J].J Algebra,2012,353(1):62-78.

[7] Lee G,Rizvi S T,Roman C S.Dual Rickart Modules[J].Comm Algebra,2011,39(11):4036-4058.

[8] Asgari S,Haghany A. t-Extending Modules and t-Baer Modules[J].Comm Algebra,2011,39:1605-1623.

[9] Anderson F W,Fuller K R.Rings and categories of modules[M].2nd ed.New York:Springer-Verlag,1992.

Property Study of t-Rickart Modules

HUO Zhi-jia

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The notion of t-Rickart modules is introduced. A module M is called a t-Rickart module, if the t-annihilator in M of any single element of S is generated by an idempotent of S, the S is its endomorphism ring. Some characterizations of t-Rickart modules are given and the basic properties of this kind of modules are studied. It is shown that every direct summand of a t-Rickart module inherits the properties.

Key words: t-Rickart modules; t-annihilators; t-Baer modules; Rickart modules