第 26 卷第 6 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26 No. 6
2013 年 12 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Dec. 2013
文章编号:1673-1549(2013)06-0086-04　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.06.020

修理延迟的两个不同型部件温贮备系统可靠性分析

廖鹏泰, 王俊元, 黄　剑

(兰州交通大学数理学院, 兰州 730070)

摘　要:研究了一类温贮备可修系统,该系统由两个不同型部件构成,且具有修理延迟。假定工作寿命,延迟修理时间和修理时间均服从指数分布,利用马尔科夫可修系统知识,不仅给出了系统的可靠度,首次故障前平均时间的结果,而且给出了各项稳态的可靠性指标的解析表达式,最后进行了实例验证。

关键词:修理延迟;温贮备系统;可靠度;故障频度

中图分类号:O213.2　　**文献标志码**:A

引　言

在系统可靠性的研究中,可修系统可靠性分析一直是其主要组成部分。在研究可修系统可靠性时,相当一部分文献往往都假定系统部件故障后能立即得到修理,这是一种理想化的系统假设,与现实情况存在很大差异。系统发生故障后,判断故障原因需要一定的时间;在本单位修理工都忙碌时请外单位的修理工需要更多的时间,当然不可控的外部条件还有很多,这在无形中造成修理的延迟,因此考虑修理有延迟的情况不是没有现实意义,而恰恰相反,它具有重要的理论意义和应用价值[1-2]。

现今,研究可修系统时,贮备系统假设为冷贮备系统的情况较多,但贮备部件在贮备期不失效也是一种理想化的假设,贮备部件在贮备期失效更接近于事实。简而言之,将贮备系统假设为温贮备系统更有现实意义[3]。

文献[4]讨论了开关寿命连续性两个不同部件温贮备可修系统,而文献[5]讨论了修理有延迟且修理设备可更换的两部件冷贮备可修系统,本文借鉴以上两文构造系统的方法,将构造一种修理延迟的两个不同型部件温贮备可修系统,并运用文献[6]中计算可靠性指标的思想方法进行一系列该系统可靠性的讨论。

1　系统模型假定

根据文献[4]进行该系统的初步假定。

(1)系统由两个不同型部件和两个修理工构成。起始时刻,一个部件工作而另外一个部件作温贮备。一旦工作部件失效时,转换开关会在一瞬间完成失效部件和贮备部件的替换;同时若贮备部件在工作时发生故障,则工作部件将替换工作,假设转换开关不失效。

(2)当两个部件全部发生故障时,显然系统就会失效。两个部件在同一瞬间恰好都故障的情况不予考虑。部件故障以后,按照"先坏先修"的原则对其进行相关维修,修好后系统重新开始工作,假设故障部件修复完成后的性能与新部件并无差别。

(3)这两个部件为不同型部件,第 i 个部件的工作时间为 X_i, 维修时间为 Y_i, 贮备时间为 Z_i, 它们各自服从参数为 λ_i, α_i, β_i 的指数分布。分布函数依次分别为

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

$$G_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$$

$$H_i(t) = 1 - e^{-\beta_i t}$$

其中, $\lambda_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $t \geqslant 0$, $i = 1,2$。在此 X_i, Y_i, Z_i, $i = 1,2$ 作为随机变量,互相独立。

(4)工作部件发生故障后,不能立即得到修理,存在一段修理延迟时间 H, H 服从指数分布 $H(t)$, 且与 X_i,

收稿日期:2013-06-20

作者简介:廖鹏泰(1988-),男,甘肃兰州人,硕士生,主要从事概率方面的研究,(E-mail)641035984@qq.com

Y_i, Z_i 相互独立, $H(t) = 1 - e^{-\mu t}$。

(5)在 $t = 0$ 时,部件都是新部件,部件 1 先工作,部件 2 作温贮备。

2　系统状态分析

参照文献[5]对系统进行分析,定义系统状态。

0 系统进入状态 0 的时刻,部件 1 在工作,部件 2 在贮备,系统正常。

1 系统进入状态 1 的时刻,部件 1 在贮备,部件 2 在工作,系统正常。

2 系统进入状态 2 的时刻,部件 1 在工作,部件 2 故障后修理延迟,系统正常。

3 系统进入状态 3 的时刻,部件 1 故障后修理延迟,部件 2 在工作,系统正常。

4 系统进入状态 4 的时刻,部件 1 在工作,部件 2 正在修理,系统正常。

5 系统进入状态 5 的时刻,部件 1 正在修理,部件 2 在工作,系统正常。

6 系统进入状态 6 的时刻,部件 1 正在修理,部件 2 故障后修理延迟,系统失效。

7 系统进入状态 7 的时刻,部件 2 故障后修理延迟,部件 1 正在修理,系统失效。

通过观察,

$E = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$W = \{0,1,2,3,4,5\}$, $F = \{6,7\}$

令 $X(t) = j$, 若时刻 t 系统处于状态 j, $j = 0,1,2,\cdots 7$。根据马尔科夫过程理论,容易得到 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是时齐马尔科夫过程。Δt 时间内系统不同状态之间的转移率矩阵[6]为

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1-\beta_2 & 0 & \beta_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-\beta_1 & \lambda_2 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1-\alpha_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2-\alpha_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

为求系统的可靠性指标,先解线性方程组

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \cdots \pi_7)A = (0,0,\cdots,0) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \end{cases}$$

也就是,

$$\begin{cases} \pi_4\alpha_2 - \pi_0(\lambda_1 + \beta_2) = 0 \\ \pi_5\alpha_1 - \pi_1(\lambda_2 + \beta_1) = 0 \\ \pi_0\beta_2 + \pi_1\lambda_2 - \pi_2\mu + \pi_6\alpha_1 = 0 \\ \pi_0\lambda_1 + \pi_1\beta_1 - \pi_3\mu + \pi_7\alpha_2 = 0 \\ \pi_2\mu - \pi_4(\lambda_1 + \alpha_2) = 0 \\ \pi_3\mu - \pi_5(\lambda_2 + \alpha_1) = 0 \\ \pi_5\lambda_2 - \pi_6\alpha_1 = 0 \\ \pi_4\lambda_1 - \pi_7\alpha_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \end{cases}$$

得:

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\alpha_1\lambda_1(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_2\lambda_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{(\lambda_1+\beta_2)(\lambda_1+\alpha_2)}{\mu\alpha_2}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_2+\alpha_1)}{\lambda_2\mu\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)}\pi_0 \\ \pi_4 = \dfrac{\lambda_1+\beta_2}{\alpha_2}\pi_0 \\ \pi_5 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\lambda_2\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)}\pi_0 \\ \pi_6 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)}\pi_0 \\ \pi_7 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\beta_2)}{\alpha_2^2}\pi_0 \\ \pi_0 = [1 + \dfrac{\alpha_1\lambda_1(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_2\lambda_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)} + \dfrac{(\lambda_1+\beta_2)(\lambda_1+\alpha_2)}{\mu\alpha_2} + \\ \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_2+\alpha_1)}{\lambda_2\mu\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)} + \dfrac{\lambda_1+\beta_2}{\alpha_2} + \\ \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\lambda_2\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)} + \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\beta_1)(\lambda_1+\alpha_2+\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2(\lambda_2+\alpha_1+\beta_1)} + \\ \dfrac{\lambda_1(\lambda_1+\beta_2)}{\alpha_2^2}]^{-1} \end{cases}$$

3 系统的各项稳态可靠性指标

通过系统分析和求得的一些主要结果,根据马尔科夫可修系统可靠度的稳态指标和平均指标的定义,就比较容易得到该系统可靠度的稳态指标和平均指标:

系统可用度:

$$A = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 =$$
$$[1 + \frac{\alpha_1\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2 + \beta_2)}{\alpha_2\lambda_2(\lambda_2 + \alpha_1 + \beta_1)} +$$
$$\frac{(\lambda_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \alpha_2)}{\mu\alpha_2} +$$
$$\frac{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2 + \beta_2)(\lambda_2 + \beta_1)(\lambda_2 + \alpha_1)}{\lambda_2\mu\alpha_2(\lambda_2 + \alpha_1 + \beta_1)} +$$
$$\frac{\lambda_1 + \beta_2}{\alpha_2} + \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \beta_1)(\lambda_1 + \alpha_2 + \beta_2)}{\lambda_2\alpha_2(\lambda_2 + \alpha_1 + \beta_1)}]\pi_0$$

系统稳态故障频度:

$$M = \lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 + \lambda_1\pi_4 + \lambda_2\pi_5$$

系统平均开工时间:

$$MUT = \frac{A}{M} = \frac{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5}{\lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 + \lambda_1\pi_4 + \lambda_2\pi_5}$$

系统平均停工时间:

$$MDT = \frac{\bar{A}}{M} = \frac{\pi_6 + \pi_7}{\lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 + \lambda_1\pi_4 + \lambda_2\pi_5}$$

系统平均周期:

$$MCT = \frac{1}{M} = \frac{1}{\lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 + \lambda_1\pi_4 + \lambda_2\pi_5}$$

修理设备忙的稳态概率:

$$B = \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7$$

求解系统的可靠性的一个重要指标,即系统首次故障前平均时间($MTTFF$)。

若时刻 0 两个部件都正常,解方程组:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\begin{bmatrix} -\lambda_1-\beta_2 & 0 & \beta_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-\beta_1 & \lambda_2 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1-\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1,0,0,0,0,0)$$

用克拉默法则和行列式性质

$$MTTFF = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & \beta_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda_2-\beta_1 & \lambda_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\mu & 0 & \mu & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1-\alpha_1 & 0 \\ -1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2-\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda_1-\beta_2 & 0 & \beta_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-\beta_1 & \lambda_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & \mu \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1-\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2-\alpha_1 \end{vmatrix}}$$

运用 matlab 软件求解,其中,分子为:

$$\mu\lambda_2^2\lambda_1^2 + \mu^2\alpha_1\beta_2\lambda_2 + \mu^2\alpha_1\lambda_2\beta_1 + 3\mu^2\alpha_1\lambda_1\lambda_2 +$$
$$\mu^2\alpha_1\lambda_1\beta_1 + \mu^2\beta_2\lambda_2\beta_1 + \mu^2\lambda_2\beta_1\lambda_1 +$$
$$\mu\alpha_1^2\beta_2\lambda_2 + \mu\alpha_1^2\lambda_1\beta_1 + 2\mu\lambda_1\alpha_1^2\lambda_2 +$$
$$\mu\alpha_1\beta_2\lambda_2^2 + \mu\alpha_1\lambda_1^2\beta_1 + \mu\alpha_1\lambda_2^2\lambda_1 + 2\mu\alpha_1\lambda_1^2\lambda_2 +$$
$$\mu\beta_2\lambda_2^2\lambda_1 + \mu\lambda_2\beta_1\lambda_1^2 + \mu^2\alpha_1^2\lambda_2 + \mu^2\alpha_1^2\lambda_1 +$$
$$\mu^2\alpha_1\lambda_1^2 + \mu^2\alpha_1\lambda_2^2 + \mu^2\beta_2\lambda_2^2 + \mu^2\lambda_1^2\lambda_2 +$$
$$\mu^2\lambda_2^2\lambda_1 + \mu^2\lambda_1^2\beta_1 + \mu\alpha_1\beta_2\lambda_2\beta_1 + \mu\alpha_1\beta_2\lambda_1\lambda_2 +$$
$$\mu\alpha_1\lambda_2\beta_1\lambda_1 + \mu\beta_2\lambda_2\beta_1\lambda_1$$

分母为:

$$\lambda_2(\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_1^2\beta_2 - \alpha_1\beta_2\alpha_2 - \alpha_1\lambda_1\alpha_2 +$$
$$\alpha_1\lambda_2\lambda_1 + \alpha_1\beta_2\lambda_2 + \alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_1\lambda_1\beta_2 +$$
$$\alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_1\beta_2\beta_1 - \lambda_2\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_1\beta_2 +$$
$$\beta_2\lambda_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1\beta_1 + \lambda_1^2\beta_1 + \lambda_1^2\lambda_2)\mu^2$$

得到的一些可靠性指标是一些解析表达式,不能很好地反映该系统的工作情况,要想通过这些数据对该系统的性能理性地和准确地认识,进而使这些数据具有一定的理论意义和指导作用,还需在特定实例中进行验证。

4 实例验证

取两组值进行对比验证:

(1) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$

$\beta_1 = 6, \beta_2 = 7, \mu = 4$

(2) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{5}{2}$

$\beta_1 = 5, \beta_2 = 6, \mu = 1$

分别将两组值代入可靠性指标的解析表达式,可得两组可靠性指标,其中第一组的可靠性指标有:

$A = 0.436, M = 1.86, B = 0.98, MTTFF = 0.712$

第二组的可靠性指标有:

$A = 0.817, M = 2.74, B = 0.0296, MTTFF = 2.18$

通过比较,发现第二组的系统可用度明显高于第一组,而第一组的系统修理设备忙的概率则远大于第二组。这就比较直观的了解了该系统在给定的条件下的各项可靠性指标,它对于是否用给定的一些元件组成一个两个不同部件温贮备系统提供了一个现实标准。

参 考 文 献:

[1] 唐应辉,魏瑛源.修理有延迟且修理设备可更换的多状态可修系统的可靠性分析.数学的实践和认识[J].2010,40(4):100-106.

[2] 刘永峰,郑海鹰.n 个同型部件和 k 个修理设备的温贮备可修系统的可靠性研究.温州大学学报[J].2010,31(3):24-29.

[3] 张建龙,孟宪云.有优先权的三状态温贮备可修系统的可靠性分析[J].辽宁工程技术大学学报,2012,31(1):98-101.

[4] 陈广娟,孟宪云.开关寿命连续性两不同部件温贮备可修系统可靠性分析[J].燕山大学学报,2005,29(3):408-413.

[5] 顾建雄,魏瑛源.修理有延迟且修理设备可更换的两部件冷贮备可修系统可靠性分析[J].兰州理工大学学报,2007,33(2):168-172.

[6] 曹晋华,程 侃.可靠性数学引论[M].北京:科学出版社,1986.

Reliability Analysis of Warm Standby System of Two Different Components with Delay Repair

LIAO Peng-tai, *WANG Jun-yuan*, *HUANG Jian*

(School of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A warm standby system of two different components with delay replay are studied. It is assumed that the working life, the delay repair time and the repair time are all exponential distributions. Then, the reliability, the mean time to failure are analyzed by Markov process. And the analytical expressions of all steady-state reliability indexes are obtained. Finally, a simple model are given for testing these reliability indexes.

Key words: delay in repair; warm standby system; reliability; failure frequency