第 26 卷第 6 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 6
2013 年 12 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Dec. 2013
文章编号:1673-1549(2013)06-0080-03　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.06.018

完全正则狭义拟仿紧空间的逆极限及 Tychonoff 乘积定理

孙 文，杨 茜，纪晓阳

(成都理工大学管理科学学院，成都 610059)

摘　要:狭义拟仿紧空间是广义仿紧空间类的重要空间,文章在附加完全正则的条件下讨论了狭义拟仿紧空间的逆极限定理和 Tychonoff 乘积定理,得到以下主要结论:(1)设 $X = \varprojlim\{x_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$，并且每一个投射 $\pi_\sigma: X \to X_\sigma$ 是开满射,设 X 是 $|\Sigma|$ - 仿紧空间,其中 $|\Sigma| > 2$,若每一个 X_σ 是完全正则狭义拟仿紧空间,则 X 也是完全正则狭义拟仿紧空间;(2)记 $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$ - 仿紧空间,则 X 是完全正则狭义拟仿紧空间当且仅当 $\forall \sigma \in \Sigma$, $X = \prod_{\alpha \in \sigma} X_\alpha$ 是完全正则狭义拟仿紧空间,其中:$\Sigma = |\Lambda|$。文章的证明方法以及得出的结论使狭义拟仿紧空间的逆极限的保持性及其乘积性更加清楚,同时所讨论的内容也使得狭义拟仿紧空间类的一些性质在应用时更加方便。

关键词:逆极限;狭义拟仿紧空间;完全正则狭义拟仿紧空间 ;遗传狭义拟仿紧空间;Tychonoff 乘积定理;可数仿紧空间

中图分类号:O189.11　　**文献标志码**:A

狭义拟仿紧空间是由刘应明院士在文献[1]中引入的概念,之后在 2001 年朱培勇在文献[2]中通过附加正规性的条件讨论了狭义拟仿紧空间的逆极限定理及其乘积性质,而我们知道完全正则空间蕴涵正则空间,但完全正则空间与正规空间在不加限制的条件下没有必然联系,因此在完全正则条件下讨论狭义拟仿紧空间的逆极限就有独立的意义。本文在附加完全正则的条件下讨论了狭义拟仿紧空间的逆极限定理和 Tychonoff 乘积定理,得出了与正规条件限制下相似的结论。最后再将 X 是 $|\Sigma|$ - 仿紧空间这一条件变为 X 是可数仿紧空间,也得出了相似的结论。

1　基本定义

定义 1[1]　一个空间 X 称为是狭义拟仿紧空间当且仅当 X 的每一个开覆盖有一个开加细 $\cup_{n\in\omega}\nu_n$ 使得 $\forall n \in \omega$, 集族 $\{\nu - \cup_{i<n}(\cup \nu_i): \nu \in \nu_n\}$ 是空间 $X - \cup_{i<n}(\cup \nu_i)$ 中的离散闭集族。

定义 2[2]　一个空间 X 称为是遗传狭义拟仿紧的当且仅当 X 的每一个子空间是狭义拟仿紧的;空间 X 称为是完全正则狭义拟仿紧的当且仅当 X 是完全正则并且是狭义拟仿紧的;空间 X 称为是遗传完全正则狭义拟仿紧的当且仅当 X 是遗传完全正则并且遗传狭义拟仿紧的。

定义 3[3]　设 X 是一拓扑空间, $|\Sigma|$ 为任意基数且 $|\Sigma| \geqslant 2$,如果 X 的每一个基数 $\leqslant |\Sigma|$ 的开覆盖都有局部有限的开加细,则称空间 X 是 $|\Sigma|$ —仿紧的。

定义 4[4]　设 X 是一拓扑空间,如果对于任意的 $x \in$ X 和 X 中任何一个不包含点 x 的闭集 B 存在一个连续映射 f:X → [0,1]使得 $f(x) = 0$ 以及对于任何 $y \in$ B 有 $f(y) = 1$,则称空间 X 是一个完全正则空间。

收稿日期:2013-05-28
基金项目:安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2010SQRL158)
作者简介:孙 文(1988-),男,四川广元人,硕士生,主要从事拓扑学方面的研究,(E-mail)1255641848@qq.com

引理 1[5]　设拓扑空间 $X = \varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$，其中 $|\Sigma|\geqslant 2$，每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满射，设 X 是 $|\Sigma|$ —仿紧的，若每一个 X_σ 是狭义拟仿紧的，则 X 也是狭义拟仿紧空间。

引理 2[5]　设拓扑空间 $X = \varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$，其中 $|\Sigma|\geqslant 2$，每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满射，设 X 是遗传 $|\Sigma|$ —仿紧的，若每一个 X_σ 是遗传狭义拟仿紧的，则 X 也是遗传狭义拟仿紧的。

引理 3[4]　任何一簇完全正则空间 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 都是完全正则空间。

引理 4[6]　设拓扑空间 $X = \varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$，其中 $|\Sigma|\geqslant 2$，每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满射，设 X 是可数仿紧的，若每一个 X_σ 是狭义拟仿紧的，则 X 也是狭义拟仿紧空间。

2　主要结论及证明

定理 1　设 $X = \varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$，并且每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满映射，如果 X 是 $|\Sigma|$ —仿紧的且每一个 X_σ 是完全正则狭义拟仿紧的，则 X 是完全正则狭义拟仿紧空间。

证明　空间 X 表示为 $X = \cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma):\sigma\in\Sigma\}$，其中 U_σ 是 X_σ 中的开集。首先证明 X 是完全正则空间：按照定义 4 只需证明对于 $\forall x\in X = \cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma),\sigma\in\Sigma\}$ 和 X 中任何一个不包含 x 的闭集 B 存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$，s. t: $f(x)=0$ 以及对于 $\forall$ y $\in$ B 有 f(y) =1。设 $x\in X=\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma),\sigma\in\Sigma\}$，B 是 X 中不包含 x 的一个闭集，因此 V = X—B 是 x 的一个开邻域，从而存在两两不同的 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\cdots\in\Sigma$（因为 $|\Sigma|$ 基数为任意的故在此处可取为无限）和 X_{σ_i} 中的开集 U_{σ_i} 使得有：$x\in U = \pi_{\sigma_1}^{-1}(U_{\sigma_1})\cup\pi_{\sigma_2}^{-1}(U_{\sigma_2})\cup\cdots\cup\pi_{\sigma_n}^{-1}(U_{\sigma_n})\cdots$。因为每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满映射，现定义映射 φ: $\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma),\sigma\in\Sigma\}\to X_{\sigma_1}\times X_{\sigma_2}\times\cdots\times X_{\sigma_n}\cdots$ 使得对于每一个 $x\in\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma),\sigma\in\Sigma\}$ 有 $\varphi(x) = (x(\sigma_1),x(\sigma_2),\cdots x(\sigma_n)\cdots)$，其中 $x(\sigma_1)\in X_{\sigma_1},\cdots x(\sigma_n)\in X_{\sigma_n}$，并且对于任意的开集 U' 有 $\varphi^{-1}(U')$ 是 X 中的开集，因此 φ 是一个连续映射，则 $\varphi(U) = U_{\sigma_1}\times U_{\sigma_2}\times\cdots\times U_{\sigma_n}\cdots$ 是 $X_{\sigma_1}\times X_{\sigma_2}\times\cdots\times X_{\sigma_n}\cdots$ 中的一个开集。又因为 $X_{\sigma_1},X_{\sigma_2},\cdots,X_{\sigma_n}\cdots$，其中 $\sigma_i\in\Sigma$ 是完全正则空间，则由引理 3 知其积空间 $X_{\sigma_1}\times X_{\sigma_2}\times\cdots\times X_{\sigma_n}\cdots$ 也是一个完全正则空间，则存在一个连续映射 g: $X_{\sigma_1}\times X_{\sigma_2}\times\cdots\times X_{\sigma_n}\cdots\to[0,1]$，s. t: g($\varphi$(x)) =0，并且对于任何 y $\in\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma):\sigma\in\Sigma\} - U_{\sigma_1}\times U_{\sigma_2}\times\cdots\times U_{\sigma_n}\cdots$ 有 g(y) =1[4]，现在令 $f = g\circ\varphi$。则 f: $\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma):\sigma\in\Sigma\}\to[0,1]$ 则有 $f(x) = 0$ 并且对于任意的 y $\in$ B $\subset\cup\{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma):\sigma\in\Sigma\}$ − U 有 f(y) =1，则由定义 1 知 X 是完全正则空间。又由引理 1 知 X 是狭义拟仿紧空间，则由定义 2 知 X 是完全正则狭义拟仿紧空间。

定理 2　设 $X = \varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$，并且每一个投射 $\pi_\sigma: X\to X_\sigma$ 是开满映射，如果 X 是 $|\Sigma|$ —仿紧的且每一个 X_σ 是遗传完全正则狭义拟仿紧空间，则 X 是遗传完全正则狭义拟仿紧空间。

证明　由定理 1 知 X 是完全正则空间，又由引理 2 知 X 是遗传狭义拟仿紧空间。现在只需证明 X 是遗传完全正则空间。设 X 的任何一个子空间为 D，记 $D = \cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$，其中 $\Lambda\subset\Sigma$，U_α 是 X_α 中的开集，由于 $|\Sigma|$ 的基数是任意的，则 Λ 的基数不妨设为 n；设 $x\in\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$，$B$ 是 $x\in\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$ 中不包含点 x 的一个闭集，因此 $V=\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\} - B$ 是 x 的一个开邻域，则存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 使得 $x\in U' = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap\pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$，定义映射 φ: $\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}\to X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 使得每一个 $z\in\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$ 有 $\varphi(z) = (Z(\alpha_1),Z(\alpha_2),\cdots,Z(\alpha_n))$ 映射 φ 是一个连续映射，则 $\psi(u) = U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\cdots\times U_{\alpha_n}$ 是 $X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 中的一个开集，由于每一个 x_σ 是完全正则空间，则 $X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 是一个完全正则空间，故存在连续映射 $g:X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}\to[0,1]$ 使得 $g(\varphi(x)) = 0$，对于 $\forall y\in X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n} - U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\cdots\times U_{\alpha_n}$ 有 $g(y) = 1$，令 $f = g\circ\varphi$: $\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}\to[0,1]$，有 $f(x) = 0$，$\forall y\in B\subset\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\} - U$，有 $f(y) = 1$。则证明了 $D=\cup\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$ 是完全正则空间，从而 X 是遗传完全正则的，由定义 2 知 X 是遗传完全正则狭义拟仿紧空间。

定理 3　记 $X = \prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 是 $|\Lambda|$ −仿紧空间，则 X 是完全正则狭义拟仿紧空间当且仅当 $\forall\sigma\in\Sigma$，$X = \prod_{\alpha\in\sigma}X_\alpha$ 是完全正则狭义拟仿紧空间，其中，$\Sigma = |\Lambda|$。

证明　($\Leftarrow$) 对于 $\forall\sigma,\rho\in\Sigma$，定义一个定向关系 $\rho\leqslant\sigma\Leftrightarrow\rho\subset\sigma$，则 Σ 关于“$\leqslant$”是一个定向集。$\forall\sigma\in\Sigma$，记 $X_\sigma = \prod_{\alpha\in\sigma}X_\alpha$，并且对 $\forall\sigma,\rho\in\Sigma$，当 $\rho\subset\sigma$ 时，定义投射 $\pi_\rho^\sigma:X_\sigma\to X_\rho$ 有 $\forall x = (x_\alpha)_{\alpha\in\sigma}\in X_\sigma$，有开满射 $\pi_\rho^\sigma(x) = (x_\alpha)_{\alpha\in\rho}\in X_\rho$，则每一个 π_ρ^σ 都是开满射，那么按照映射性质 $\{X_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$ 有一个逆象空间。记 $\overline{X}$，则

由文献[6]知 $\overline{X}$ 与 X 同胚,且每一个投射 $\pi_\sigma:\overline{X}\to X$ 是满射,则由文献[3]知每一个 π_σ 是连续开满映射,又因为 $|\Lambda| = |\Sigma|$ 且 X 是 $|\Lambda|$ -仿紧的,则 $\overline{X}$ 是 $|\Sigma|$ -仿紧的,则由定理 1 知 $\overline{X}$ 是完全正则狭义拟仿紧的,又因为 $\overline{X}$ 与 X 同胚,所以 X 是完全正则狭义拟仿紧空间。

$(\Rightarrow)$ $\forall\sigma\in\Sigma$, $\alpha\in\Lambda-\sigma$, 取 $x_\alpha\in X_\alpha$, 则 $Y_\sigma=\prod_{\alpha\in\sigma}X_\alpha\times\prod_{\alpha\in\Lambda-\sigma}\{x_\alpha\}$ 是 X 的闭子集,又因为 X 是完全正则狭义拟仿紧空间,则 Y_σ 是完全正则狭义拟仿紧,从而 $\prod_{\alpha\in\sigma}X_\alpha$ 是完全正则狭义拟仿紧空间。

定理 4 设 $X=\varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$,其中 $|\Sigma|\geqslant 2$,每一个投射 $\pi_\sigma:X\to X_\sigma$ 是开满射,设 X 是可数仿紧的,若每一个 X_σ 是完全正则狭义拟仿紧的,则 X 也是完全正则狭义拟仿紧空间。

证明 根据定理条件由引理 4 知 X 也是狭义拟仿紧空间。现在只需证明 X 是完全正则空间,因为 X 是可数仿紧的即 X 的每一个可数开覆盖具有局部有限的开加细覆盖,若 X 的可数开覆盖为无限则由定理 1 知 X 是完全正则空间,若 X 的可数开覆盖为有限则记 X 为定理 2 中的空间 D 知 X 是完全正则空间。则由定义 2 知 X 是完全正则狭义拟仿紧空间。

参考文献:

[1] 刘应明.一类包含弱仿紧空间与次仿紧空间的拓扑空间[J].数学学报,1977,20:212-214.

[2] 朱培勇.正规狭义拟仿紧的乘积性质[J].数学年刊,2001,22A(3):369-374.

[3] 高国士.拓扑空间论[M].北京:科学出版社,2000.

[4] 熊金城.点集拓扑讲义[M].(3 版).北京:高等教育出版社,2003.

[5] 蒋继光,张树果.拟仿紧性与乘积空间[J].数学年刊,2005,26A(6):771-776.

[6] 蒋继光.逆极限与 σ-积的 Lindeloff 度[J].科学通报,1993,38(1):8-10.

[7] 张树果.关于狭义拟仿紧空间[J].数学年刊,2002,24(4):453-458.

[8] Chiba K.Normality of inverse limits[J].math,Japonica,1990,35(5):959-970.

[9] Chiba K.Covering properties of inverse limits[J].GeneralTopology,2002,20:101-114.

[10] Chiba K.Covering properties of inverse limits General-Topology Ⅱ[J].Topology Proceedings,2003,27:79-100.

Inverse limits and Theorems of Tychonoff Products of Completely Regular Strict Quasi-Paracompactness Spaces

SUN Wen, YANG Xi, JI Xiao-yang

(College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: The Strict Quasi-Paracompactness space is an important space of generalized paracompact spaces. Based on the additional condition that the Strict Quasi-Paracompactness space is completely regular space, the inverse limit and Tychonoff product theorem are discussed, the main conclusions are the following: (1) let $x=\varprojlim\{x_\sigma,\pi_\rho^\sigma,\Sigma\}$ and let every projection π_σ be open and onto mapping, if X is $|\Sigma|$-paracompact space and every x_σ is Completely regular Strict Quasi-Paracompactness space, $|\Sigma|>2$, then X is Completely regular Strict Quasi-Paracompactness space. (2) let $X=\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ be $|\Lambda|$-paracompact space, only if $\forall\sigma\in\Sigma$, $\prod_{\alpha\in\sigma}X_\alpha$ is Completely regular Strict Quasi-Paracompactness space, $\Sigma=|\Lambda|$, then X is Completely regular Strict Quasi-Paracompactness space. From the proof method and conclusions, the retentivity of inverse limit and products of Strict Quasi-Paracompactness spaces are more clearly, also the content discussed makes some properties of Strict Quasi-Paracompactness spaces more convenient in application.

Key words: inverse limits; Strict Quasi-Paracompactness spaces; completely regular spaces; genetic paracompact spaces; Theorems of Tychonoff Products; countable paracompact spaces