

# 一类 Weierstrass 型函数图像的 Box 维数

张 静, 刘鸿博

(四川水利职业技术学院, 成都 611830)

**摘 要:**Weierstrass 函数是一类处处不可微的函数,其函数图像具有分形性质。研究 Weierstrass 函数图像的分形维数在分形几何中具有非常重要的地位。通过研究一类 Weierstrass 型函数  $W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k)$  的图像的 Box 维数,证明了这类函数图像的 Box 维数为  $2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n / \log b_n)$ , 从而进一步揭示出这类 Weierstrass 函数图像的 Hausdorff 维数与 Box 维数之间的关系。

**关键词:**Weierstrass 型函数;函数图像;Box 维数

**中图分类号:**0172

**文献标志码:**A

函数图像的维数在分形几何的研究中具有相当重要的地位。人们不仅研究经典的 Weierstrass 函数,对于各种推广形式的 Weierstrass 型函数,同样可以给出它的 Box 维数<sup>[1-8]</sup>。本文在讨论了一类 Weierstrass 型函数的性质后,给出了这类函数的 Box 维数。

## 1 基本定义和引理

**定义 1** 设  $f: I \rightarrow R$  上的连续函数,以  $\Gamma_f$  表示函数图像,即  $\Gamma_f = \{(t, f(t)) : t \in I\}$ 。

**引理 1** 设  $f(x)$  在  $x_0$  处具有有限的右导数  $f'_+(x_0) = A$ ,  $\lambda$  是正常数,  $x_n, x'_n$  是满足如下条件的两个实数列:

- (i)  $x_0 \leq x_n < x'_n$
- (ii)  $x'_n - x_n \geq \lambda(x'_n - x_0)$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n} = A$$

## 2 定理及其证明

定理 1 对于 Weierstrass 型函数

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k), x \in [0, 1]$$

$\{a_k\}$  是一列非负实数,  $\varphi_k$  是  $R$  上的 Lipschitz 函数, 如果满足:

- (i)  $\varphi(x+1) = \varphi(x)$
- (ii)  $|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ , 其中  $C$  为常数。
- (iii)  $\|\varphi_k\| = l_k, l_1 \leq l_k \leq l_2$
- (iv)  $b_k \uparrow \infty$
- (v)  $(a_{n+1}b_{n+1})/(a_n b_n) \geq \lambda, a_{n+1}/a_n \leq 1/\lambda, \lambda > 1$

则有

$$\dim_B \Gamma_W = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n}$$

在证明定理 1 之前,首先讨论这类 Weierstrass 型函数的性质。

**性质 1** 对于函数  $W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k)$ , 当满足定理 1 条件时,它是无处可微的连续函数。

**证明** 对任意的  $n$ , 存在唯一的正整数  $N_n$ , 使得

$$\frac{N_n - 1}{b_n} \leq x < \frac{N_n}{b_n}$$

令  $x_n = N_n/b_n, x'_n = (N_n + 1)/b_n$ , 则  $x \leq x_n < x'_n$ 。

又由于  $x'_n - x_n = 1/b_n, x'_n - x \leq 2/b_n$ , 所以

$$x'_n - x_n \geq \frac{1}{2}(x'_n - x_n)$$

当  $k < n$  时,由 Lipschitz 条件有

$$|\varphi(b_k x'_n + \theta_k) - \varphi(b_k x_n + \theta_k)| \leq$$

$$Cb_k |x'_n - x_n| = \frac{Cb_k}{b_n}$$

当  $k > n$  时,

$$|\varphi_k(b_k x'_n) - \varphi_k(b_k x_n)| \leq 2l_k \leq 2l_2$$

所以

$$|W(x'_n) - W(x_n)| \geq l_1 a_n - \sum_{k=0}^{n-1} Ca_k b_k / b_n - \sum_{k>n} 2l_2 a_k$$

利用条件(iii)和(v),得

$$\left| \frac{W(x'_n) - W(x_n)}{x'_n - x_n} \right| \geq \frac{l_1 a_n - \sum_{k=0}^{n-1} Ca_k b_k / b_n - \sum_{k>n} 2l_2 a_k}{1/b_n} =$$

$$l_1 a_n b_n - C \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k - 2l_2 b_n \sum_{k>n} a_k \geq$$

$$l_1 a_n b_n - \frac{C}{\lambda - 1} a_n b_n - \frac{2l_2}{\lambda - 1} a_n b_n =$$

$$(l_1 - \frac{C}{\lambda - 1} - \frac{2l_2}{\lambda - 1}) a_n b_n$$

所以,当  $n \rightarrow \infty$  时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{W(x'_n) - W(x_n)}{x'_n - x_n} \right| = \infty$$

而当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x'_n \rightarrow x$ , 利用引理 1 可知函数  $W(x)$  在  $x$  处不存在有限的右导数。同理可证  $W(x)$  不存在有限的左导数。由于  $\varphi$  是有界连续函数,故  $W(x)$  一致收敛,因而  $W(x)$  连续。

综上所述,  $W(x)$  是无处可微的连续函数。由此可以看出,构造的一类 Weierstrass 型函数是无处可微的连续函数。

对于经典的 Weierstrass 函数

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(\pi b^k x), 0 < a < 1, b > 1$$

由于

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = a < \frac{1}{\lambda} < 1, b^k \uparrow \infty$$

$$\frac{a^{n+1} b^{n+1}}{a^n b^n} = ab > 1 + \frac{3\pi}{2}(1 - a) = \lambda$$

由周期性以及满足 Lipschitz 条件,经典的 Weierstrass 函数满足定理 1 的条件。因此,这类函数是较经典的 Weierstrass 函数更为一般的处处不可微的连续函数。

**证明** 将  $[0,1]$  分成  $[b_n]$  个区间,令

$$I_{n,j} = \left[ \frac{j}{[b_n]}, \frac{j+1}{[b_n]} \right], j = 0, 1, 2, \dots, [b_n] - 1$$

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) + \sum_{k>n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) = a_n \varphi_n(b_n x + \theta_n) + \sum_{k \neq n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k)$$

首先,

$$\dim_B \Gamma_W \leq 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n}$$

在每个区间  $I_{n,j}$  上估计  $\sup W(x) - \inf W(x)$ 。

$$\sup W(x) - \inf W(x) =$$

$$\left( \sup \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) - \inf \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) \right) +$$

$$\left( \sup \sum_{k>n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) - \inf \sum_{k>n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) \right)$$

由于  $\varphi_k$  是  $R$  上的 Lipschitz 函数,所以,

$$\sup \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) - \inf \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) \leq$$

$$\sum_{k=1}^n C \frac{a_k b_k}{[b_n]}$$

同时,

$$\sup \sum_{k>n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) - \inf \sum_{k>n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) \leq$$

$$\sum_{k>n} 2l_k a_k \leq \sum_{k>n} 2l_2 a_k$$

所以,

$$\sup W(x) - \inf W(x) \leq \sum_{k=1}^n C \frac{a_k b_k}{[b_n]} + \sum_{k>n} 2l_2 a_k$$

$$N(\Gamma_{n,j}, b_n^{-1}) \leq \left( \sum_{k=1}^n C \frac{a_k b_k}{[b_n]} + \sum_{k>n} 2l_2 a_k \right) b_n$$

又因为  $\Gamma_W = \bigcup_{j=0}^{[b_n]-1} \Gamma_{n,j}$ , 得

$$N(\Gamma_W, b_n^{-1}) \leq \left( \sum_{k=1}^n C \frac{a_k b_k}{[b_n]} + \sum_{k>n} 2l_2 a_k \right) b_n^2$$

令  $\delta = b_n^{-1}$ , 利用引理 1 有:

$$\dim_B \Gamma_W = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(\Gamma_W)}{-\log \delta} =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(\Gamma_W)}{\log \delta^{-1}} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \left( \sum_{k=1}^n Ca_k b_k / [b_n] + \sum_{k>n} 2l_2 a_k \right) b_n^2 \right)}{\log b_n} =$$

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \left( \sum_{k=1}^n Ca_k b_k / [b_n] + \sum_{k>n} 2l_2 a_k \right) b_n \right)}{\log b_n} \leq$$

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \sum_{k=1}^n 2Ca_k b_k + \sum_{k>n} 2l_2 a_k b_n \right)}{\log b_n}$$

由条件(v),知道

$$\sum_{k=1}^n 2Ca_k b_k \leq 2C\lambda a_n b_n / (\lambda - 1)$$

$$\sum_{k>n} 2l_2 a_k b_n \leq 2l_2 a_n b_n / (\lambda - 1)$$

所以,

$$\dim_B \Gamma_W \leq 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2C\lambda a_n b_n / (\lambda - 1) + 2l_2 a_n b_n / (\lambda - 1))}{\log b_n} = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(C_1 a_n)}{\log b_n} = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n} \quad (1)$$

其中,  $C_1 = 2C\lambda / (\lambda - 1) + 2l_2 / (\lambda - 1)$ 。

其次,

$$\dim_B \Gamma_W \geq 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n}$$

类似地

$$\sup a_n \varphi_n(b_n x + \theta_n) - \inf a_n \varphi_n(b_n x + \theta_n) = a_n l_n \geq a_n l_1$$

同时

$$\sup \sum_{k \neq n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) - \inf \sum_{k \neq n} a_k \varphi_k(b_k x + \theta_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} C \frac{a_k b_k}{[b_n]} + \sum_{k>n} 2l_2 a_k \leq \frac{C}{\lambda - 1} \frac{a_n b_n}{[b_n]} + 2l_2 \frac{a_n}{\lambda - 1} \leq \frac{2C}{\lambda - 1} a_n + \frac{2l_2}{\lambda - 1} a_n = C_2 a_n$$

其中,  $C_2 = 2C / (\lambda - 1) + 2l_2 / (\lambda - 1)$ 。所以,

$$\sup W(x) - \inf W(x) \geq a_n l_1 - C_2 a_n = (l_1 - C_2) a_n$$

所以

$$N(\Gamma_{n,j}, b_n^{-1}) \geq (l_1 - C_2) a_n b_n$$

$$N(\Gamma_w, b_n^{-1}) \geq (l_1 - C_2) a_n b_n (b_n - 1)$$

同理

$$\dim_B \Gamma_W = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\Gamma_W)}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\Gamma_W)}{\log \delta^{-1}} \geq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((l_1 - C_2) a_n b_n (b_n - 1))}{\log b_n} = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n} \quad (2)$$

综上所述,由式(1)、式(2),得

$$\dim_B \Gamma_W = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{\log b_n}$$

定理1证毕。

参考文献:

- [1] 肯尼斯·法尔科内.分形几何—数学基础及其应用[M].沈阳:东北大学出版社,1991.
- [2] Hu T Y, Lau K S. Fractal Dimensions and Singularities the Weierstrass Type Functions [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1993, 335(2): 649-665.
- [3] 王世俊, 于建辉. 关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J]. 哈尔滨理工大学学报:自然科学版, 1994, 4(2): 91-94.
- [4] 王世俊. 关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J]. 福州大学学报:自然科学版, 2000, 30(4): 448-451.
- [5] 李红娟. 一类广义 Weierstrass 型函数图像 K-维数的简单证明[J]. 太原理工大学学报:自然科学版, 2011, 42(1): 99-101.
- [6] 何国龙. 关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J]. 浙江师范大学学报:自然科学版, 2003, 26(4): 330-332.
- [7] 文志英. 分形几何的数学基础[M]. 上海:上海科技教育出版社, 2000.
- [8] 李本秀, 魏毅强. 一类 Weierstrass 函数图像的盒维数[J]. 太原科技大学学报:自然科学版, 2010, 31(4): 314-316.

## Box Dimension of a Class of Weierstrass Function

ZHANG Jing, LIU Hong-bo

(Sichuan Water Conservancy Vocational College, Chengdu 611830, China)

**Abstract:** Weierstrass function is everywhere continuous and nowhere differentiable. Its graph has fractal properties. Studying the fractal dimension of Weierstrass function graph plays an important role in fractal geometry. The Box-dimension of graph of a kind of Weierstrass-type function is studied. It is proved that its Box-dimension is equal to  $2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n / \log b_n)$ , and the relationship between Hausdorff dimension and Box dimension is progressively revealed.

**Key words:** Weierstrass function; graph; Box dimension