

# 关于一个 Hardy - Hilbert 型不等式的改进与推广

罗 静<sup>1</sup>, 隆建军<sup>2</sup>

(1. 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000; 2. 攀枝花市大河中学, 四川 攀枝花 617061)

**摘 要:**对 Hardy - Hilbert 不等式进行了研究。通过引入参数对杨必成权系数不等式作出了加强推广。利用改进的 Euler - Maclaurin 求和公式进行了严格证明,并结合带权的 Holder 不等式得出了两个联系含多参数的 Hardy - Hilbert 型不等式,所得结果改进和推广了相关文献的一些相应结果。由此导出的一系列推论,表明了这一结果在得到一类无穷级数形式不等式中的作用。

**关键词:**Hardy - Hilbert 型不等式; Euler - Maclaurin 求和公式; Holder 不等式

**中图分类号:** O178

**文献标志码:** A

## 引 言

设  $a_n, b_n \geq 0 (n \in N), 0 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 <$

$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 0 < (\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$ , 则

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{n+m} < \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{m=1}^{\infty} b_m^q)^{\frac{1}{q}} \quad (1)$$

称(1)式为 Hilbert 不等式。特别的,当  $p = \frac{1}{2}$  时,  $q =$

$\frac{1}{2}$ , 注意到  $\frac{1}{m+n+1} < \frac{1}{m+n}$ , 则(1)式为

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{n+m+1} < \pi (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

这里,常数  $\pi$  是最佳值<sup>[1]</sup>。(2)式在分析学及相关领域有重要的应用,近年来,数学家们对其进行了推广、加强和改进<sup>[2-6]</sup>。2002 年,杨必成通过建立权系数不等式<sup>[7]</sup>:

$$\omega(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(\ln m + \ln n + 1)} \left( \frac{2\ln n + 1}{2\ln m + 1} \right)^{\frac{1}{p}} < \pi \quad (3)$$

得到一个 Hilbert 型不等式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\ln m + \ln n + 1} < \pi \left( \sum_{m=1}^{\infty} n a_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} n b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

这里  $\pi$  是最佳值。它的等价形式为:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{\ln m + \ln n + 1} \right)^2 < \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 \quad (5)$$

这里  $\pi^2$  也是最佳值。2007 年,王卫宏,方波漪建立权系数不等式<sup>[8]</sup>:

$$\omega(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(\ln m + \ln n + 1)} \left( \frac{2\ln n + 1}{2\ln m + 1} \right)^{\frac{1}{p}} < \pi - \frac{1}{2\sqrt{2\ln n + 1}} \quad (6)$$

得到一个 Hilbert 型不等式及其等价形式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^r n^s (\ln m + \ln n + 1)} < \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{2\sqrt{\ln n + 1}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{2\sqrt{\ln n + 1}} \right) n^{1-2s} b_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^r (\ln m + \ln n + 1)} \right)^2 < \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{2\sqrt{\ln n + 1}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \quad (8)$$

本文的目的是利用改进的 Euler - Maclaurin 公式,对权系数不等式(3)引入参数  $\mu$  进行加强推广,得到一个联系含多参数的二重级数形式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{m^r n^s (2\mu + \ln m + \ln n)}, (r, s \in R)$$

的 Hardy - Hilbert 型不等式。且本文结论是(4)式、(5)式的新推广和加强。

### 1 基本引理

**引理 1** [9] 若  $f^{(2r)}(x) > 0, f^{(2r+1)}(x) < 0, x \in [0, +\infty), f^{(r)}(\infty) = 0 (r = 0, 1, 2, 3), \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$ , 则有

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) < \int_1^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1) \quad (9)$$

**引理 2** 对于  $\mu \geq \frac{7 + \sqrt{73}}{24}$ , 下列权系数不等式成立:

$$\omega(n, \mu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(2\mu + \ln m + \ln n)} \left(\frac{2\mu + \ln n}{2\mu + \ln m}\right)^{\frac{1}{2}} < \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\ln n + \mu}} + \sqrt{\frac{\ln n + \mu}{\mu}}} \quad (10)$$

**证明** 设

$$f_n(x) = \frac{1}{x(2\mu + \ln x + \ln n)} \left(\frac{\mu + \ln n}{\mu + \ln x}\right)^{\frac{1}{2}}, (x \geq 1, n \in N^+)$$

则

$$f_n(1) = \frac{1}{2\mu + \ln n} \left(\frac{\mu + \ln n}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, f'_n(1) = - \left[ \frac{1 + \frac{1}{2\mu}}{2\mu + \ln n} + \frac{1}{(2\mu + \ln n)^2} \right] \left(\frac{\mu + \ln n}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

令  $y = \frac{\mu + \ln x}{\mu + \ln n}$ , 可得

$$\int_1^{\infty} f_n(x) dx = \int_{\frac{\mu}{\mu + \ln n}}^{\infty} \frac{1}{(y+1)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \pi - \int_0^{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \frac{1}{1+y} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

又由

$$\int_0^{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \frac{1}{1+y} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dy = 2 \int_0^{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \frac{1}{1+y} dy^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\mu + \ln n}} \left(\frac{\mu}{\mu + \ln n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \frac{1}{(1+y)^2} dy^{\frac{1}{2}} > \frac{2(\ln n + \mu)}{2\mu + \ln n} \left(\frac{\mu}{\mu + \ln n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} \frac{(\mu + \ln n)^2}{(2\mu + \ln n)^2} \left(\frac{\mu}{\mu + \ln n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \left(\frac{2(\mu + \ln n)}{2\mu + \ln n} + \frac{4\mu(\mu + \ln n)}{3(2\mu + \ln n)^2}\right)$$

$$\omega(n, \mu) = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(m) <$$

$$\int_1^{\infty} f_n(x) dx + \frac{1}{2}f_n(1) - \frac{1}{12}f'_n(1) <$$

$$\pi - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \left(\frac{2(\mu + \ln n)}{2\mu + \ln n} + \frac{4\mu(\mu + \ln n)}{3(\mu + \ln n)^2}\right) + \frac{1}{2(2\mu + \ln n)} \left(\frac{\mu + \ln n}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \left[ \frac{1 + \frac{1}{2\mu}}{2\mu + \ln n} + \frac{1}{(2\mu + \ln n)^2} \right] \left(\frac{\mu + \ln n}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} = \pi - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \left[ \frac{2(\mu + \ln n)}{2\mu + \ln n} - \frac{\mu + \ln n}{2\mu(2\mu + \ln n)} - \frac{\left(1 + \frac{1}{2\mu}\right)(\mu + \ln n)}{12\mu(2\mu + \ln n)} + \frac{4\mu(\mu + \ln n)}{3(2\mu + \ln n)^2} - \frac{\mu + \ln n}{12\mu(\mu + \ln n)^2} \right] =$$

$$\pi - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \left[ \left(2 - \frac{1}{2\mu} - \frac{1 + 2\mu}{24\mu^2}\right) \frac{\mu + \ln n}{2\mu + \ln n} + \left(\frac{4\mu}{3} - \frac{1}{12\mu}\right) \frac{\mu + \ln n}{(2\mu + \ln n)^2} \right]$$

又由

$$\left(2 - \frac{1}{2\mu} - \frac{1 + 2\mu}{24\mu^2}\right) \frac{\mu + \ln n}{2\mu + \ln n} = \left(1 + \frac{24\mu^2 - 14\mu - 1}{24\mu^2}\right) \frac{\mu + \ln n}{2\mu + \ln n} \geq \frac{\mu + \ln n}{2\mu + \ln n}, \frac{4\mu}{3} - \frac{1}{12\mu} > 0$$

$$\omega(n, \mu) < \pi - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} \frac{\mu + \ln n}{2\mu + \ln n} =$$

$$\pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}}$$

所以,引理 2 成立。

### 2 主要结论及其证明

**定理 1** 设  $a_n, b_n \geq 0$ , 若  $r, s \in R, \mu \geq \frac{7 + \sqrt{73}}{24}$ , 使

得  $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2r} a_n^2 < \infty, 0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2s} b_n^2 < \infty$ , 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^r n^s (2\mu + \ln m + \ln n)} < \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n^{1-2s} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

**证明** 由带权的 Holder 不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^r n^s (2\mu + \ln m + \ln n)} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left[ \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n^{\frac{1}{2}}} \right) a_m \right] \cdot \\ & \left[ \left( \frac{2\mu + \ln n}{2\mu + \ln m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n^{1-2s}}{m^{\frac{1}{2}}} \right) b_n \right] \leq \\ & \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n} \right) a_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln n}{2\mu + \ln m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n^{1-2s}}{m} \right) b_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ & \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, \mu) m^{1-2r} a_m^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \omega(n, \mu) n^{1-2s} b_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

再由引理 2, 可得 (11) 式, 证毕。

**定理 2** 设  $\{a_n\}$  为实数列, 若  $r \in R, \mu \geq \frac{7 + \sqrt{73}}{24}$ ,

使得  $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2r} a_n^2 < \infty$ , 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^r (2\mu + \ln m + \ln n)} \right)^2 < \\ & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \quad (12) \end{aligned}$$

**证明** 由  $\omega(n, \mu) < \pi$  和带权的 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^r (2\mu + \ln m + \ln n)} = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left[ \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n^{\frac{1}{2}}} \right) a_m \right] \cdot \\ & \left[ \left( \frac{2\mu + \ln n}{2\mu + \ln m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m} \right) \right] \leq \\ & \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n} \right) a_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln n}{2\mu + \ln m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n} \right) a_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} [\omega(n, \mu)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^r (2\mu + \ln m + \ln n)} \right)^2 \leq \\ & \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu + \ln m + \ln n} \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m^{1-2r}}{n} \right) a_m^2 \right] [\omega(n, \mu)] < \\ & \pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n(2\mu + \ln m + \ln n)} \left( \frac{2\mu + \ln m}{2\mu + \ln n} \right)^{\frac{1}{2}} m^{1-2r} a_m^2 \right] < \\ & \pi \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \omega(m, \mu) m^{1-2r} a_m^2 \right] \end{aligned}$$

再由引理 2 的 (10) 式有 (12) 式成。证毕。

由于定理 1 中的 (11) 式和定理 2 中的 (12) 式都带有参数  $r, s, \mu$ , 所以具有一般性。在 (11) 式和 (12) 式中对  $r, s, \mu$  适当取值, 还可得到:

**推论 1** 当  $r = s = 0$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{2\mu + \ln m + \ln n} < \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**推论 2** 当  $r = s = \frac{1}{2}$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\sqrt{mn} (2\mu + \ln m + \ln n)} < \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**推论 3** 当  $\mu = 1$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m^r n^s (2 + \ln m + \ln n)} < \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n}}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n}}} \right) n^{1-2s} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**推论 4** 当  $r = 0$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2\mu + \ln m + \ln n} \right)^2 < \\ & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) n a_n^2 \end{aligned}$$

**推论 5** 当  $r = \frac{1}{2}$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\sqrt{m} (2\mu + \ln m + \ln n)} \right)^2 < \\ & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\mu + \ln n}} + \sqrt{\frac{\mu + \ln n}{\mu}}} \right) a_n^2 \end{aligned}$$

**推论 6** 当  $\mu = 1$  时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^r (2 + \ln m + \ln n)} \right)^2 < \\ & \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \pi - \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n} + \frac{1}{\sqrt{1 + \ln n}}} \right) n^{1-2r} a_n^2 \end{aligned}$$

### 3 结束语

一个世纪以来,数学家们对于 Hilbert 不等式的研究从未中断过,得到了丰富多彩的研究成果。本文所述推论是定理 1 和定理 2 的直接应用,如果对这两个定理中的参数  $r, s, \mu$  继续取值,则可得到一系列无穷级数形式的不等式。

#### 参考文献:

- [1] 匡继昌.常用不等式[M].(4版).济南:山东科学技术出版社,2012.
- [2] Yang B.On a strengthened version of the more accurate Hardy-Hilbert's inequality[J].Acta Math. Sinica(N. S.), 1999(42):1103-1110.
- [3] Yang Bicheng.A strengthened Hardy-Hilbert's inequality [J].Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 2003,6(2):119-124.
- [4] 杨必成.较为精密的 Hardy-Hilbert 不等式的一个加强[J].数学学报,1999,42(6):1103-1110.
- [5] 孙保炬.关于一个 Hilbert 类不等式及其应用[J].海南师范学院学报:自然科学版,2006,19(2):126-130.
- [6] 隆建军.一个 Hardy-Hilbert 型不等式的推广与加强[J].山东理工大学学报:自然科学版,2012,26(2):25-28.
- [7] Yang Bicheng.A new inequality similar to Hilbert's inequality[J].J Math Anal Appl.1998(26):166-179.
- [8] 王卫宏,方波漪.一个 Hilbert 型不等式的推广与加强[J].五邑大学学报:自然科学版,2007,20(4):19-23.
- [9] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲[M].北京:高等教育出版社,1985.

## On a Hardy-Hilbert's Type of Inequality and Its Application

LUO Jing<sup>1</sup>, LONG Jian-jun<sup>2</sup>

(1. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;

2. Dahe Middle School of Panzhihua, Panzhihua 617061, China)

**Abstract:** The Hardy-Hilbert inequality is studied. Strengthen the promotion by introducing parameters of Yang Bicheng inequality for weight coefficient is made. And the use of improved Euler-Maclaurin summation formula, to strengthen the promotion made strict proof. Thus combining Holder inequality with weights obtained Hardy-Hilbert type inequality with two link parameters. The results extend and improve some corresponding results in recent literature.

**Key words:** Hardy-Hilbert type inequality; Euler-Maclaurin summation formula; Holder inequality