第 26 卷第 4 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 4
2013 年 8 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Aug. 2013
文章编号:1673-1549(2013)04-0097-04　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.04.023

M – 矩阵 Fan 积最小特征值的下界

杨晓英, 刘　新

(四川信息职业技术学院基础教育部, 四川　广元　628017)

摘　要:关于非奇 M – 矩阵 A 与 B 的 Fan 积 $A\star B$, 利用 Gerschgorin 圆盘定理和 Brauer 定理,给出 $A\star B$ 的最小特征值下界的新估计式。新估计式只与矩阵的元素有关。数值算例表明新估计式改进了现有的结果,易于计算。

关键词:M – 矩阵;Fan 积;最小特征值;下界

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

引　言

N 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$; $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵; $C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵。$\rho(P)$ 表示 $n\times n$ 阶非负矩阵 P 的谱半径。

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 如果 $a_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵 A 为非负矩阵,记为 $A\geqslant 0$; 若 $a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵 A 为正矩阵,记为 $A>0$ 。

定义 2　设 $A\in C^{n\times n}$, 当 $n\geqslant 2$ 时,若存在 $n\times n$ 阶置换矩阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中, A_{11} 是 $r\times r$ 阶子矩阵, A_{22} 是 $(n-r)\times(n-r)$ 阶子矩阵($1\leqslant r<n$),则称矩阵 A 为可约矩阵。若没有置换矩阵 P 存在,则称矩阵 A 为不可约矩阵。

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 且 $a_{ij}\leqslant 0,i\neq j$, 则称矩阵 A 为 Z 矩阵(简记为 $A\in Z^{n\times n}$)。

定义 4　设 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, A 可以表示为 $A=\lambda I-B$, 其中 $B\geqslant 0$, 当 $\lambda\geqslant\rho(B)$ 时,则称 A 为 M – 矩阵。特别地,当 $\lambda>\rho(B)$ 时,称 A 为非奇异 M – 矩阵;当 $\lambda=\rho(B)$ 时,称 A 为奇异 M – 矩阵。

定义 5　对于 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 记 $\tau(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$, (其中 $\sigma(A)$ 表示矩阵 A 的谱), $\tau(A)$ 称为 A 的最小特征值[1]。

定义 6　设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$, $c_{ij}=\begin{cases}a_{ii}b_{ii},j=i\\ -a_{ij}b_{ij},j\neq i,\end{cases}$ 记 $A\star B=(c_{ij})\in C^{m\times n}$, 称为矩阵 A 与 B 的 Fan 积。

如果 $A,B\in Z^{n\times n}$ 是 M – 矩阵,则 $A\star B$ 也是 M – 矩阵[2]。

关于非奇异 M – 矩阵 A 与 B 的 Fan 积的 $\tau(A\star B)$ 下界估计问题,近年来受到广泛研究[3-9]。文献[1]中,若 A,B 是 M – 矩阵,则 $\tau(A\star B)\geqslant\tau(A)\tau(B)$ 。文献[3]给出了下界估计式: $\tau(A\star B)\geqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}\tau(B)+b_{ii}\tau(A)-\tau(A)\tau(B)\}$ 。文献[4]得到的估计为: $\tau(A\star B)\geqslant(1-\rho(J_A)\rho(J_B))\min\limits_i(a_{ii}b_{ii})$ 。文献[5]引用文献[6]中的 Brauer 定理给出 $\tau(A*B)$ 的一个新的下界估计式:

$$\tau(A\star B)\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-$$

收稿日期:2013-04-07

基金项目:四川信息职业技术学院自然科学基金项目(2012C04);广元市科学技术和知识产权局科技计划项目(GYST20122733);四川省教育厅基金项目(13ZB0309)

作者简介:杨晓英(1984-),女,山西忻州人,讲师,硕士,主要从事矩阵理论与应用方面的研究,(E-mail)yangxiaoying137@126.com

$$[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(a_{ii}-\tau(A))$$
$$(b_{ii}-\tau(B))(a_{jj}-\tau(A))(b_{jj}-\tau(B))]^{\frac{1}{2}}\}$$

文献[7]引入符号

$$m_{ji}=|a_{ji}|h_j,\ h_j=\begin{cases}d_j,d_j\neq 0 & m_i=\max\limits_{j\neq i}\{m_{ji}\}\\ 1,d_j=0,\end{cases}$$

给出一个只依赖于矩阵元素的新估计式:

$$\tau(A\star B)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}$$

本文受到文献[5]和文献[7]的启发,利用 Gerschgorin 圆盘定理和 Brauer 定理,并引入新符号

$$s_{ji}=|a_{ji}|t_j,\ t_j=\begin{cases}r_j,r_j\neq 0 & s_i=\max\limits_{j\neq i}\{s_{ji}\},\ i,j\in N\\ 1,r_j=0;\end{cases}$$

给出非奇异 $M-$ 矩阵 A 与 B 新的 $\tau(A\star B)$ 下界估计式。

1 符号与引理

首先,给出一些记号,它们会在后面的讨论中用到。记:

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|$$

$$d_i=\frac{R_i}{|a_{ii}|},\ i\in N$$

$$r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|},\ l\neq i$$

$$r_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\},\ i\in N$$

$$s_{ji}=|a_{ji}|t_j,\ t_j=\begin{cases}r_j,r_j\neq 0\\ 1,r_j=0\end{cases}$$

$$s_i=\max_{j\neq i}\{s_{ji}\},\ i,j\in N$$

引理1[8] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是任意复矩阵,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数。则 A 的所有特征值都位于下列区域之中

$$\cup\left\{z\in C:|z-a_{ii}|\leqslant x_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|,i\in N\right\}$$

引理2[6] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是任意复矩阵,则 A 的所有特征值都位于下列区域之中 $\bigcup\limits_{i,j=1i\neq j}^{n}$

$$\{z\in C:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ki}|\sum_{k\neq j}|a_{kj}|\}$$

2 主要结果

定理1 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, $B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$ 是非奇异 $M-$ 矩阵,则

$$\tau(A\star B)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{t_j}\right\}$$

证明 设 $A\star B$ 不可约,则 A,B 不可约。令 λ 是 $A\star B$ 的一个特征值,满足 $\tau(A\star B)=\lambda$,则由引理1,可知存在 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant n)$,使得

$$|\lambda-a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}|\leqslant s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|a_{ji_0}b_{ji_0}|$$

$$\lambda\geqslant a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|a_{ji_0}b_{ji_0}|\geqslant$$

$$a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{|a_{ji_0}|t_j}|a_{ji_0}||b_{ji_0}|=$$

$$a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{|b_{ji_0}|}{t_j}\geqslant$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{t_j}\right\}$$

若 $A\star B$ 是可约矩阵。令 $H=(h_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶置换矩阵,且 $h_{12}=h_{23}=\cdots=h_{n-1,n}=h_{n1}=1$,其余的 $h_{ij}=0$,则对于任意正实数 η,当 η 充分小时,使得 $A-\eta H$, $B-\eta H$ 的所有顺序主子式为正,从而 $A-\eta H$ 和 $B-\eta H$ 都是不可约非奇异 M－矩阵,若用 $A-\eta H$, $B-\eta H$ 代替 A,B,并令 $\eta\to 0$,则结论仍然成立。

定理2 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, $B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$ 是非奇异 $M-$ 矩阵,则

$$\tau(A\star B)\geqslant$$
$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+$$
$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

证明 若 $A\star B$ 不可约,则 A,B 不可约,令 $S=\mathrm{diag}(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 且 $S>0$,且 $\sigma(A\star B)=\sigma(S^{-1}(A\star B)S)=\sigma(S(A^T\star B^T)S^{-1})$。因为 $\tau(A\star B)$ 是 $A\star B$ 的一个特征值,那么 $\tau(A\star B)\in\sigma(S(A^T\star B^T)S^{-1})$。

设 $\tau(A\star B)=\lambda$,由引理2知,存在数对 (i,j), $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,使得

$$|\lambda-a_{ii}b_{ii}||\lambda-a_{jj}b_{jj}|\leqslant\sum_{k\neq i}\frac{a_{ki}b_{ki}}{s_k}s_i\sum_{k\neq j}\frac{a_{kj}b_{kj}}{s_k}s_j=$$

$$\sum_{k\neq i,a_{ki}\neq 0}\frac{a_{ki}b_{ki}}{s_k}s_i\sum_{k\neq j,a_{kj}\neq 0}\frac{a_{kj}b_{kj}}{s_k}s_j\leqslant$$

$$\sum_{k\neq i,a_{ki}\neq 0}\frac{a_{ki}b_{ki}}{a_{ki}t_k}s_i\sum_{k\neq j,a_{kj}\neq 0}\frac{a_{kj}b_{kj}}{a_{kj}t_k}s_j\leqslant$$

$$s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}$$

即

$$\lambda \geqslant \frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}]^{\frac{1}{2}}\}$$

则

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant$$
$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}]^{\frac{1}{2}}\}$$

若 $A\bigstar B$ 可约。令 $H = (h_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶置换矩阵，且 $h_{12} = h_{23} = \cdots = h_{n-1,n} = h_{n1} = 1$，其余的 $h_{ij} = 0$，则对于任意正实数 η，当 η 充分小时，使得 $A-\eta H$，$B-\eta H$ 的所有顺序主子式为正，从而 $A-\eta H$ 和 $B-\eta H$ 都是不可约非奇异 M－矩阵，若用 $A-\eta H$，$B-\eta H$ 代替 A，B，并令 $\eta\to 0$，则结论仍然成立。

定理 3　设 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是非奇异 M – 矩阵，则

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii} - s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\right\}$$

证明　不失一般性，假设

$$a_{ii}b_{ii} - s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k} \leqslant a_{jj}b_{jj} - s_j\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k},\ i\neq j$$

则

$$s_j\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k} \leqslant a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}$$

那么

$$a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\sum_{k\neq j}\frac{|b_{kj}|}{t_k}]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$
$$a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4(a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii})s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k} + \left(2s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\right)^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{jj}b_{jj} - a_{ii}b_{ii} + 2s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k})^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - a_{jj}b_{jj} + a_{ii}b_{ii} - 2s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k} =$$
$$2\left(a_{ii}b_{ii} - s_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{t_k}\right)$$

故，结论成立。

注　定理 3 说明定理 2 改进了定理 1 的结果。

3　算　例

例 1　设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

由估计式

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant \tau(A)\tau(B) = 0.191$$

由估计式

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}\tau(B) + b_{ii}\tau(A) -$$
$$\tau(A)\tau(B)\} = 1.573$$

由估计式

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant (1-\rho(J_A)\rho(J_B))$$
$$\min_i(a_{ii}b_{ii}) = 0.1808$$

由估计式

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant \min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} - [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 +$$
$$4(a_{ii} - \tau(A))(b_{ii} - \tau(B))\cdot$$
$$(a_{jj} - \tau(A))(b_{jj} - \tau(B))]^{\frac{1}{2}}\} = 1.573$$

由估计式

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii} - m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\} = 2.4333$$

应用本文的定理 1，得

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant 2.8333$$

由本文的定理 2，得

$$\tau(A\bigstar B) \geqslant 2.9199$$

事实上，$\tau(A\bigstar B) = 3.2296$。

注　通过算例分析结果，可知定理 1 和定理 2 的结果有效地改进现有文献的结果。

参 考 文 献：

[1] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[2] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[3] Fang M Z.Bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl.,2007,425:7-15.

[4] Huang R.Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl.,2008,428:1551-1559.

[5] Liu Q B,Chen G L.On two inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl.,2009,431:974-984.

[6] Brauer A.Limits for the characteristic roots of a matrix II[J].Duke Math.,J.1947,14:21-26.

[7] Li Y T,Li Y Y,Wang R W,et al.Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl.,2010,432:536-545.

[8] Vargar S.Minimal Gerschgorin sets[J].Pacific J.Math.,1965,15(2):719-729.

[9] 杨晓英,刘 新.两个矩阵 Fan 积和 Hadamard 积特征值的界[J].文山学院学报,2012,25(3):31-35.

Lower Bounds on the Minimum Eigenvalue of the Fan Product of M-matrices

YANG Xiao-ying, *LIU Xin*

(Ministry of Basic Education, Sichuan Information Technology College, Guangyuan 628017, China)

Abstract: If A and B are nonsingular M-matrices, some new lower bounds for the minimum eigenvalue of $A\star B$ are given by using Gerschgorin theorem and Brauer theorem. The example indicates that these bounds improve several existing results in some cases and the estimating formulas are easier to calculate for they are only depended on the entries of matrices A and B.

Key words: M-matrix; Fan product; minimum eigenvalue; lower bound