第 26 卷第 4 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 26 No. 4
2013 年 8 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Aug. 2013
文章编号:1673-1549(2013)04-0090-03 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.04.021

求解分块三对角方程组的三次 PE_k 方法的讨论

曾闽丽[1], 李柳芬[2]

(1.莆田学院数学学院,福建 莆田 351100;2.四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

摘 要:提出了求解系数矩阵为块三对角矩阵的线性方程组的三次 PE_k 方法,并讨论了系数矩阵为 Hermite 正定矩阵时三次 PE_k 方法的可解性及收敛性。最后在数值实验中估计出最优参数的范围,并与 SBGS 和 Jacobi 方法进行了比较,验证了新算法的有效性。

关键词:分块三对角阵;三次 PE_k 方法;Hermite 正定矩阵;线性方程组

中图分类号:O241.6 **文献标志码**:A

引 言

许多偏微分方程(如 Poisson 方程)离散化得到块三对角方程组,具有大型稀疏的特点,因此求解此类线性方程组成为近几年来的一大热点问题。迭代法在解这类方程组中起着至关重要的作用。其中 PE(Pseudo Elimination)方法于 1977 年由 William S. Helliwell 提出,该算法主要用于求解系数矩阵为块三对角矩阵的线性代数方程组,这种方法具有迭代收敛快及存贮量少等优点。胡家赣等证明了系数矩阵为正定矩阵和对角优势 L-矩阵时 PE 方法的收敛性[1],系数矩阵为对称正定、M-矩阵和 H-矩阵时 PE_k 方法的收敛性[2],并指出了一次 PE 方法比 Jacobi 方法和 SBGS 方法的收敛速度快。张凯院、王自然讨论了系数矩阵为 Hermite 正定矩阵时,二次 PE 方法和二次 PE_k 方法的可解性和收敛性[3]。任水利等在解线性方程组时建立一种新型的二次 PE_k 方法,得到并证明了当系数矩阵为 M-矩阵及 H-矩阵时该方法的可解性及收敛性[4]。而李荣、畅大为讨论了系数矩阵为非奇异 M 矩阵时,三次 PE 方法的可解性和收敛性[5]。关于线性方程组的迭代解法,可参阅文献[6],块三对角方程组的迭代求解可参阅文献[7]。本文将讨论系数矩阵为 Hermite 正定矩阵时三次 PE_k 方法的可解性及收敛性。

1 三次 PE_k 方法

考虑线性方程组 $Ax = F$,其中 A 为块三对角矩阵,即

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \\ & & & A_m & B_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 B_i 为 n_i 阶矩阵($n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$)。对矩阵 A 进行近似三角分解

$$A \approx \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ A_2 & S_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & A_m & S_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & T_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_{m-1} & T_{m-1} \\ & & & I_m \end{bmatrix} = LU$$

其中

$$S_1 = B_1$$

$$T_i = S_i^{-1} C_i (i = 1,2,\cdots,m-1)$$

$$S_i = B_i [I_i + B_i^{-1} A_i B_{i-1}^{-1} C_{i-1} + (B_i^{-1} A_i B_{i-1}^{-1} C_{i-1})^2 + (B_i^{-1} A_i B_{i-1}^{-1} C_{i-1})^3]^{-1} (i = 2,3,\cdots,m) \tag{2}$$

令

$$M = LU =$$

收稿日期:2013-03-16

基金项目:福建省教育厅 A 类科技项目(JA12287);莆田学院教学改革项目(JG200918)

作者简介:曾闽丽(1982-),女,福建三明人,讲师,博士生,主要从事数值代数方面的研究,(E-mail)ptzengminli@126.com

$$\begin{bmatrix} S_1 & C_1 & & & \\ A_2 & A_2T_1+S_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{m-1} & A_{m-1}T_{m-2}+S_{m-1} & C_{m-1} \\ & & & A_m & A_mT_{m-1}+S_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$N = M - A = \mathrm{diag}(O, N_2, \cdots, N_m)$

其中,$N_i = A_iT_{i-1} + S_i - B_i (i = 2,3,\cdots,m)$,那么 $Ax = b$ 等价于 $Mx = Nx + b$。建立迭代格式

$$Mx^{(k+1)} = Nx^k + b(k = 0,1,2,\cdots) \quad (4)$$

称格式(4)为三次 PE 方法[5]。若将式(2)的 S_i 改写为

$$S_i = B_i[I_i + kB_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1} + k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^2 + k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^3]] - 1 \ (i = 2,3,\cdots,m)$$

其中 k 为参数,得到本文的三次 PE_k 方法。

2　A 为 Herimte 正定矩阵时三次 PE_k 方法可解性和收敛性

引理 1[8]　设 A 的特征值 $\lambda(A)$ 为非负实数,B 为 Hermite 正定矩阵,$C = AB$(或者 $C = BA$)为 Hermite 矩阵,则 C 为半正定矩阵。再设 $\lambda(A)$ 均为正数,则 C 为正定矩阵。

引理 2[8]　设 $A = M - N$,且 A 和 M 都可逆,则对 $M^{-1}N$ 的任意特征值 μ,存在 $A^{-1}N$ 的某个特征值 λ,使得 $\mu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$。

定理 1　设 A 为 Herimte 矩阵,则三次 PE_k 方法中的矩阵 S_i、M 和 N 均为 Herimte 矩阵。

证明　由 A 为 Herimte 矩阵,即 $A^H = A$,易知 $B_i^H = B_i$,$A_i^H = C_{i-1}$,所以有

$$(A_iT_{i-1})^H = (A_iS_{i-1}^{-1}C_{i-1})^H = C_{i-1}^HS_{i-1}^{-1}A_i^H = A_iS_{i-1}^{-1}C_{i-1} = A_iT_{i-1}$$

所以 $M^H = M$,从而

$$N^H = (M-A)^H = M^H - A^H = N$$

定理 2　设 A 为 Herimte 正定矩阵,实参数 $k > 0$,则有

(1)三次 PE_k 方法可解,即三次 PE_k 方法中的逆矩阵存在,从而算法可以进行下去。

(2)设 $G_i = B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1}$,若参数 k 满足

$$k < \frac{1}{1-\lambda^3(G_i)}$$

则三次 PE_k 方法收敛,即三次 PE_k 方法中的迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的谱半径 $\rho(M^{-1}N) < 1$。

证明　(1)由 A 正定知 B_i 均为正定矩阵,从而 $A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1} = A_iB_{i-1}^{-1}A_i^H$ 半正定,这是因为 $y \neq 0$ 时,有

$$y^HA_iB_{i-1}^{-1}A_i^Hy = (A_i^Hy)^HB_{i-1}^{-1}(A_i^Hy) \geq 0$$

又由

$$B_i^{\frac{1}{2}}(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})B_i^{-\frac{1}{2}} = B_i^{-\frac{1}{2}}(A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})B_i^{-\frac{1}{2}}$$

知 $B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1}$ 的特征值为非负实数,从而当 $k > 0$ 时,

$$I_i + kB_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1} + k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^2 + k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^3$$

的特征值大于 1,因此 S_i 均可逆。

(2)由于

$$\begin{aligned} N_i &= A_iT_{i-1} + S_i - B_i = A_iS_{i-1}^{-1}C_{i-1} + S_i - B_i = \\ &A_i[I_{i-1} + kB_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2} + k(B_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2})^2 + \\ &k(B_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2})^3]B_{i-1}^{-1}C_{i-1} + \\ &B_i[I_i + kB_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1} + k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^2 + \\ &k(B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1})^3]^{-1} - B_i \\ &(i = 2,\cdots,m; A_1 = O, C_0 = O) \end{aligned}$$

将 $G_i = B_i^{-1}A_iB_{i-1}^{-1}C_{i-1}$ 代入可得

$$\begin{aligned} N_i &= kA_iB_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2}B_{i-1}^{-1}C_{i-1} + \\ &kA_i(B_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2})^2B_{i-1}^{-1}C_{i-1} + \\ &kA_i(B_{i-1}^{-1}A_{i-1}B_{i-2}^{-1}C_{i-2})^3B_{i-1}^{-1}C_{i-1} + \\ &B_i[(I_i + kG_i + kG_i^2 + kG_i^3)^{-1} + G_i - I_i] \\ &(i = 2,\cdots,m; A_1 = O, C_0 = O) \end{aligned} \quad (5)$$

由 $A_i^H = C_{i-1}(i = 2,3,\cdots,m)B_i^H = B_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 可知,(5)式右边的前三项为 Hermite 半正定矩阵。由定理 2 条件(1)知 $\lambda(G_i) \geq 0$,

11 当 $\lambda(G_i) \geq 1$ 时,$(I_i + kG_i + kG_i^2 + kG_i^3)^{-1} + G_i - I_i$ 的特征值大于 0。

22 当 $0 \leq \lambda(G_i) \leq 1$ 时,由已知条件 $k < \dfrac{1}{1-\lambda^3(G_i)}$,可知 $(I_i + kG_i + kG_i^2 + kG_i^3)^{-1} + G_i - I_i$ 的特征值也大于 0。

因为 B_i 为 Hermite 正定矩阵,且为 Hermite 矩阵,由引理 1 知(6)式右边第四项为正定矩阵。所以 N_i 为半正定矩阵,从而 N 亦为半正定矩阵,再由 $A^{-1}N = A^{-\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}NA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$ 可知 $\lambda(A^{-1}N)$ 为非负实数。根据定理 2 条件(1)结论及式(3)可得 M 为可逆矩阵,由引理 2 有

$$\lambda(M^{-1}N) = \frac{\lambda(A^{-1}N)}{1+\lambda(A^{-1}N)}$$

因此 $0 \leq \lambda(M^{-1}N) < 1$,故三次 PE_k 方法收敛。

3　算　例

设方程 $Ax = F$ 中的矩阵 A 形如式(1):

$$A_i = C_{i-1} = \mathrm{diag}(-1\ -1\ -1)(i = 2,3,\cdots,m)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}(i = 1,2,\cdots,m)$$

取 $F = (1,2,\cdots,n)^T$。可知 A 为 Hermite 正定矩阵。取 $n = 3000$,迭代次数为 5,其迭代误差随 k 的取值变化如图 1 所示。

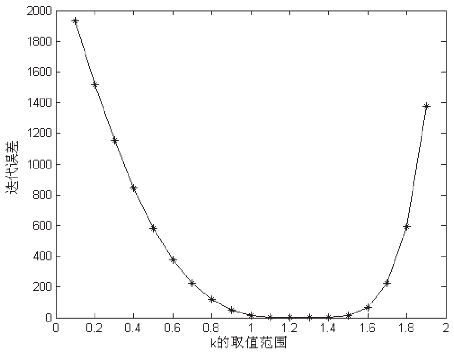

图 1 k 不同取值时迭代误差曲线

由图 1 可知 k 取 1.3 左右时收敛速度最快,用三次 PE_k 方法求解和用 jacobi、SBGS 方法求解结果见表 1(终止准则为 10^{-10})。

表 1 k 不同取值对应的迭代次数和时间比较

次数/时间(s)	$n=3000$	$n=6000$	$n=15000$
$k=0.1$	37/1.750	38/3.532	40/9.187
$k=0.5$	28/1.297	29/2.641	30/7.000
$k=1.0$	17/0.797	17/1.547	19/4.422
$k=1.2$	12/0.547	12/1.094	13/3.031
$k=1.3$	11/0.500	11/1.000	11/2.578
$k=1.4$	13/0.609	14/1.281	15/3.469
$k=1.5$	16/0.750	17/1.547	18/4.219
$k=2.0$	34/1.594	36/3.281	–
$k=2.5$	85/3.969	–	–
SBGS 方法	39/1.844	40/3.703	42/9.719
Jacobi 方法	155/6.141	161/12.656	163/32.093

由表 1 可知 k 取 1.3 时,算法的迭代步骤最少,所花时间最短。当 n 为 3000 时其迭代误差随迭代次数变化如图 2 所示。

4 结束语

本文在三次 PE 算法和二次 PE_k 方法的基础上,提出求解块三对角方程组的三次 PE_k 方法,当 $k=1$ 时便是参考文献[5]中讨论的三次 PE 方法,作为 PE 方法的推广。理论分析了求解系数矩阵为 Hermite 正定矩阵时的三次 PE_k 方法的可解性及收敛性分析,并在数值算例中验证了相应理论结果。

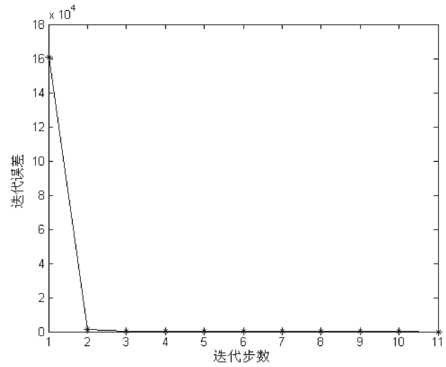

图 2 $k=1.3$ 时迭代误差与迭代步数变化曲线

参 考 文 献:

[1] 胡家赣.解线性代数方程组的 PE 方法[J].计算数学,1982,4(2):151-157.

[2] 胡家赣,王邦荣.解线性代数方程组的 PE_k 方法[J].数值计算与计算机应用,1993,14(2):146-156.

[3] 张凯院,王自然.解线性代数方程组的二次 PE 方法和二次 PE_k 方法[J].西北工业大学学报,2003,21(3):340-343.

[4] 任水利,张凯院,叶正麟.解线性代数方程组的新型二次 PE_k 方法[J].高等学校计算数学学报,2006,28(2):176-184.

[5] 李 荣,畅大为.三次 PE 方法收敛性的分析[J].太原师范学院学报:自然科学版,2008,7(1):4-6.

[6] 胡家赣.线性代数方程组的迭代解法[M].北京:科学出版社,1997.

[7] 任水利,张凯院,叶正麟.块三对角线性代数方程组的一种迭代解法[J].昆明理工大学学报:理工版,2007,32(2):116-120.

[8] 张凯院,徐 仲.数值代数[M].北京:科学出版社,2006.

Cubic PE_k Method for Solving a System of Block Tridiagonal Equation

ZENG Min-li[1], *LI Liu-fen*[2]

(1. Mathematics Department, Putian University, Putian 351100, China; 2. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Cubic PE_K method is proposed for solving a system of linear equations whose coefficient matrix is block tridiagonal matrix. And the solubility and convergency of the cubic PE_k method are analyzed when the coefficient matrix is Hermitian positive definite matrix. Finally the range of optimal parameter is estimated in the numerical experiment. Compared with the SBGS and Jacobi method, the effectiveness of new algorithm is verified.

Key words: block tridiagonal matrix; cubic PE_k method; Hermitian positive definite matrix; linear equation