

啮合角变化的斜齿行星齿轮系统的 动力学建模与分析

张捷^{1,2}, 廖映华^{1,2}, 黄波^{1,2}

(1. 四川理工学院, 四川 自贡 643000; 2. 过程装备与控制工程四川省高校重点实验室, 四川 自贡 643000)

摘要:当考虑轴承变形时,各齿轮中心位置将发生偏移时,从而使啮合副的啮合角发生变化。传统的行星传动系统动力学建模时,为了降低建模的复杂程度,将啮合角视为常值,因此,所建立的动力学模型不能反映啮合角和重合度变化对系统动态特性的影响。为了分析啮合角对斜齿行星传动系统动态特性的影响,采用齿轮的实际中心位置坐标表示齿轮副的啮合角,建立了一种新的啮合角变化的斜齿行星传动系统动力学模型,并利用 Matlab 求解计算系统的运动微分方程,得到的系统动态响应。仿真分析结果表明,啮合角变化对行星齿轮系统动态特性有明显的影。

关键词:斜齿行星齿轮系统; 时变啮合角; 动力学建模; 动态响应

中图分类号:TH13

文献标志码:A

引言

行星齿轮被广泛用于汽车、重型机械、飞机和轮船的动力传动系统中,它具有高的功重比,结构紧凑和高的传动效率。但是行星齿轮系统结构复杂,它由几条行星轮支路共同承载,常在几条行星轮支路之间的载荷分配不均匀,造成载荷集中某条行星轮支路上,同时系统中存在的各种内、外部激励使得系统产生振动和噪声,这些问题是造成行星齿轮系统失效的主要原因,因此研究行星齿轮系统的动态特性具有重要的工程意义。

目前关于行星齿轮系统动态特性的研究很多,常用的行星齿轮传动集中参数动力学模型有两种:一种是平移-扭转振动动力学模型^[1],另一种是纯扭转振动动力学模型^[2]。在这些模型中都把啮合角视为常数,但是当考虑轴承变形时,齿轮中心会发生偏移,使得啮合角发生变化。因此本文考虑轴承变形对啮合角的影响,提出了一个新的行星传动系统动力学模型,研究啮合角变化

对斜齿行星齿轮系统动态特性的影响。

1 斜齿行星齿轮系统动力学模型

某斜齿行星齿轮系统的内齿圈固定,太阳轮输入,行星架输出。将系统简化为集中参数模型,支承和轮齿啮合视为弹性元件,轮体及行星架被视为刚体,内齿圈与基体刚性连接,建立图 1 所示的斜齿行星齿轮系统的动力学模型,图中各构件的参数下标: c 为行星架(行星架), r 为内齿圈, s 为太阳轮, p 为行星轮,行星轮序号用下标 i 表示, $i = 1, 2, \dots, N$, 其中 N 为行星轮个数。

如图 1 所示,第 i 个行星轮的初始位置角 $\varphi_i = 360 \times (i-1)/N$ 。 θ_i 为构件 i 绕其回转中线转过的角位移; T_{in} 为输入转矩, T_{out} 为输出转矩。 k_{cx} 、 k_{cy} 分别为太阳轮沿 x 、 y 轴方向的轴承支承刚度; k_{sc} 、 k_{sc} 分别为行星架沿 x 、 y 轴方向的轴承支承刚度; k_{px} 、 k_{py} 分别为行星轮沿 ξ 、 η 轴方向的轴承支承刚度; k_{pi} ($i = 1, 2, \dots, N$) 表示内齿圈和行星轮之间的综合啮合刚度; e_{spi} 、 e_{pqi} ($i = 1, 2, \dots, N$) 分别为太阳轮、内齿圈与第 i 个行星轮齿副之间的综合啮合误差。

收稿日期:2013-05-21

基金项目:过程装备与控制工程四川省高校重点实验室基金资助项目(GKYY201105);四川省教育厅基金项目(13ZA0129)

作者简介:张捷(1964-),四川富顺人,副教授,硕士,主要从事机械设计制造及其自动化方面的研究,(E-mail) sclgzj@vip.sina.com

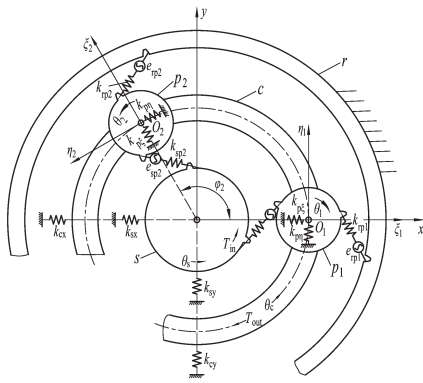


图1 斜齿行星齿轮系统的动力学模型

2 行星轮系各构件间的运动关系及啮合变形

2.1 行星轮系各构件中心位置的运动坐标

图2说明了太阳轮、行星架和行星轮的行星运动, O 为太阳轮和行星架在轴承变形之前的中心位置, O_i 为第 i 个行星轮在轴承变形之前的中心位置, O_s, O_c, O'_i 分别为太阳轮、行星架和第 i 个行星轮在轴承变形后的中心位置。太阳轮的运动用平移坐标 x_s 和 y_s , 以及角坐标 θ_s 表示。行星架的运动用平移坐标 x_c 和 y_c , 以及角坐标 θ_c 表示, 因而太阳轮和行星架的中心位置可分别用矢量 r_s 和 r_c 表示为:

$$r_s = x_s i + y_s j, r_c = x_c i + y_c j \quad (1)$$

其中, i, j 分别为沿 x 和 y 轴的单位矢量。

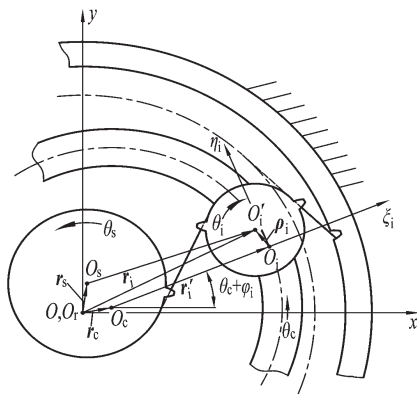


图2 考虑轴承变形时行星轮系各构件间的相对位置关系

第 i 个行星轮的运动可用平移坐标 x_i 和 y_i , 以及角坐标 θ'_i 表示为:

$$r_i = x_i i + y_i j \quad (2)$$

由于行星轮的轴安装在行星架上, 行星轮的运动由行星架和行星轮相对于行星架的运动合成。如图2所示, 第 i 个行星轮在轴承变形后的中心位置 O'_i 可用矢量 r_i 表示为:

$$r'_i = r_c + r'_i + \rho_i \quad (3)$$

其中, r'_i 是在行星架上从行星架中心到行星轮安装点的位置矢量; ρ_i 为在坐标系 $O_i \xi_i \eta_i$ 中度量的, 行星轮相对于行星架行星架的位移矢量。矢量 r'_i, ρ_i 可表示为:

$$\begin{cases} r'_i = R_c [\cos(\theta_c + \varphi_i) i + \sin(\theta_c + \varphi_i) j] \\ \rho_i = \xi_i e_i^\xi + \eta_i e_i^\eta \end{cases} \quad (4)$$

其中, R_c 为从行星架中心到行星轮安装点的距离, 即行星轮中心分布圆的半径。根据坐标系 Oxy 和 $O_i \xi_i \eta_i$ 的关系, 矢量 e_i^ξ, e_i^η 分别为沿 ξ_i 和 η_i 轴的单位矢量, 它们可以用单位矢量 i, j 表示如下:

$$\begin{cases} e_i^\xi = \cos(\theta_c + \varphi_i) i + \sin(\theta_c + \varphi_i) j \\ e_i^\eta = -\sin(\theta_c + \varphi_i) i + \cos(\theta_c + \varphi_i) j \end{cases} \quad (5)$$

将式(1)、(4)、(5)带入式(3), 整理可得第 i 个行星轮的平移坐标 x_i 和 y_i 分别为:

$$\begin{cases} x_i = x_c + (\xi_i + R_c) \cos(\theta_c + \varphi_i) - \eta_i \sin(\theta_c + \varphi_i) \\ y_i = y_c + (\xi_i + R_c) \sin(\theta_c + \varphi_i) + \eta_i \cos(\theta_c + \varphi_i) \end{cases} \quad (6)$$

第 i 个行星轮绕其中心位置的转角为 θ_i , 同时其中心与行星架固连并随行星架一起以转角 θ_c 转动。所以第 i 个行星轮的角坐标为:

$$\theta'_i = -\theta_i + \theta_c \quad (7)$$

2.2 行星轮系内外啮合的啮合变形

如图2所示, 当行星轮系的各构件存在平移和旋转运动时, 太阳轮与第 i 个行星轮之间沿啮合线方向上的啮合变形 δ_{spi} 为

$$\begin{aligned} \delta_{spi} = & [x_s - x_i + R_c \cos(\theta_c + \varphi_i)] \sin(\alpha_{spi} - \varphi_{spi}) + \\ & [y_s - y_i + R_c \sin(\theta_c + \varphi_i)] \cos(\alpha_{spi} - \varphi_{spi}) + \\ & R_s(\theta_s - \theta_c) - R_p \theta_i + e_{spi} \end{aligned} \quad (8)$$

其中, α_{spi} 为太阳轮与第 i 个行星轮啮合的端面啮合角; φ_{spi} 为第 i 个行星轮相对于太阳轮的位置角。如图3所示, α_{spi} 和 φ_{spi} 可表示为

$$\begin{cases} \alpha_{spi} = \cos^{-1} \frac{R_s + R_p}{\sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2}} \\ \varphi_{spi} = \tan^{-1} \frac{y_i - y_s}{x_i - x_s} \end{cases} \quad (9)$$

其中, R_s, R_p 分别为太阳轮和行星轮的基圆半径。

如图2所示, 第 i 个行星轮与内齿圈之间沿啮合线方向上的啮合变形 δ_{rpi} 为

$$\begin{aligned} \delta_{rpi} = & [x_i - R_c \cos(\theta_c + \varphi_i)] \sin(\alpha_{rpi} + \varphi_{rpi}) - \\ & [y_i - R_c \sin(\theta_c + \varphi_i)] \cos(\alpha_{rpi} + \varphi_{rpi}) - \\ & R_i \theta_c + R_p \theta_i \end{aligned} \quad (10)$$

其中, α_{rpi} 为第 i 个行星轮与内齿圈啮合的端面啮合角;

φ_{rpi} 为第*i*个行星轮相对于内齿圈的位置角。 α_{rpi} 和 φ_{rpi} 可表示为:

$$\alpha_{rpi} = \cos^{-1} \frac{R_r - R_p}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \varphi_{rpi} = \tan^{-1} \frac{y_i}{x_i} \quad (11)$$

其中, R_r 为内齿圈的基圆半径。

3 运动微分方程组及其求解

3.1 运动微分方程组

常用的建立运动方程的方法有牛顿第二定律法和Lagrange方程法。本文采用Lagrange方程法获得行星轮系的运动微分方程。Lagrange方程如下

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q \quad (12)$$

其中, q 为行星轮系的广义坐标; Q 为行星轮系的广义力矩阵; E_k 为行星齿轮系统总动能; E_p 为行星齿轮系统总势能。由图1,取广义坐标 q 为:

$$q = (x_c, y_c, \theta_c, x_s, y_s, \theta_s, x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_N, y_N, \theta_N)^T \quad (13)$$

根据行星轮系承受外力,广义力 Q 为:

$$Q_m = \begin{cases} T_{in} & m = \theta_s \\ T_{out} & m = \theta_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

设太阳轮、行星架和行星轮的质量分别为 m_s 、 m_c 和 m_p ,转动惯量分别为 I_s 、 I_c 和 I_p 。行星轮系的动能 E_k 等于各构件的动能之和,即

$$E_k = \frac{1}{2} [m_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + I_s \dot{\theta}_s^2] + \frac{1}{2} [m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + I_c \dot{\theta}_c^2] + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [m_p (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_p (\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_i)^2] \quad (15)$$

其中, \dot{x}_i 、 \dot{y}_i 分别为行星轮沿 x 、 y 方向的速度。根据公式(6) \dot{x}_i 和 \dot{y}_i 分为:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_c + (\xi_i - \eta_i \dot{\theta}_c) \cos(\theta_c + \varphi_i) - [(\xi_i + R_c) \dot{\theta}_c + \dot{\eta}_i] \sin(\theta_c + \varphi_i) \quad (16)$$

$$\dot{y}_i = \dot{y}_c + (\xi_i - \eta_i \dot{\theta}_c) \sin(\theta_c + \varphi_i) + [(\xi_i + R_c) \dot{\theta}_c + \dot{\eta}_i] \cos(\theta_c + \varphi_i) \quad (17)$$

行星轮系的势能等于各构件的势能之和,即

$$E_p = \frac{1}{2} [k_{sx} x_s^2 + k_{sy} y_s^2] + \frac{1}{2} [k_{cx} x_c^2 + k_{cy} y_c^2] + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [k_{p\xi} \xi_i^2 + k_{p\eta} \eta_i^2 + k_{spi} \delta_{spi}^2 + k_{rpi} \delta_{rpi}^2] \quad (18)$$

将公式(13)~(18)代入公式(12),则太阳轮的运

动学方程为:

$$m_s \ddot{x}_s + k_{sx} x_s + \sum_{i=1}^N k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial x_s} = 0 \quad (19)$$

$$m_s \ddot{y}_s + k_{sy} y_s + \sum_{i=1}^N k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial y_s} = 0 \quad (20)$$

$$I_s \ddot{\theta}_s + \sum_{i=1}^N k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial \theta_s} = T_{in} \quad (21)$$

行星架的运动学方程:

$$(m_c + Nm_p) \ddot{x}_c - \sum_{i=1}^N \{ [(\xi_i + R_c) \ddot{\theta}_c - \eta_i \ddot{\theta}_c^2 + 2\dot{\xi}_i \dot{\theta}_c + \ddot{\eta}_i] \sin(\theta_c + \varphi_i) + [\eta_i \dot{\theta}_c + (\xi_i + R_c) \dot{\theta}_c^2 + 2\dot{\eta}_i \dot{\theta}_c - \ddot{\xi}_i] \cos(\theta_c + \varphi_i) \} + k_{sx} x_c + \sum_{i=1}^N \left(k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial x_c} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial x_c} \right) = 0 \quad (22)$$

$$(m_c + Nm_p) \ddot{y}_c - \sum_{i=1}^N \{ (\eta_i \ddot{\theta}_c + (\xi_i + R_c) \dot{\theta}_c^2 + 2\dot{\eta}_i \dot{\theta}_c - \ddot{\xi}_i) \sin(\theta_c + \varphi_i) - [-(\xi_i + R_c) \ddot{\theta}_c + \eta_i \dot{\theta}_c^2 - 2\dot{\xi}_i \dot{\theta}_c - \ddot{\eta}_i] \cos(\theta_c + \varphi_i) \} + k_{sy} y_c + \sum_{i=1}^N \left(k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial y_c} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial y_c} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\{ I_c + 3I_p + \sum_{i=1}^N m_p ((\xi_i + R_c)^2 + \eta_i^2) \} \ddot{\theta}_c + \sum_{i=1}^N I_p \ddot{\theta}_i - \sum_{i=1}^N m_p \{ \xi_i \eta_i - (\xi_i + R_c) \ddot{\eta}_i - 2(\xi_i \dot{\xi}_i + R_c \dot{\xi}_i + \eta_i \dot{\eta}_i) \dot{\theta}_c \} + [(\xi_i + R_c) \ddot{x}_c + \eta_i \ddot{y}_c] \sin(\theta_c + \varphi_i) + [-(\xi_i + R_c) \ddot{y}_c + \eta_i \ddot{x}_c] \cos(\theta_c + \varphi_i) \} + \sum_{i=1}^N \left(k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial \theta_c} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial \theta_c} \right) = -T_{out} \quad (24)$$

第*i*个行星轮的运动学方程

$$m_p [\ddot{x}_c \cos(\theta_c + \varphi_i) + \ddot{y}_c \sin(\theta_c + \varphi_i) + \ddot{\xi}_i - \eta_i \ddot{\theta}_c - (R_c + \xi_i) \dot{\theta}_c^2 - 2\dot{\eta}_i \dot{\theta}_c + k_{p\xi} \xi_i + k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial \xi_i} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial \xi_i}] = 0 \quad (25)$$

$$m_p [-\ddot{x}_c \sin(\theta_c + \varphi_i) + \ddot{y}_c \cos(\theta_c + \varphi_i) + \ddot{\eta}_i + (R_c + \xi_i) \ddot{\theta}_c - \eta_i \dot{\theta}_c^2 + 2\dot{\xi}_i \dot{\theta}_c + k_{p\eta} \eta_i + k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial \eta_i} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial \eta_i}] = 0 \quad (26)$$

$$I_p (\ddot{\theta}_c + \ddot{\theta}_i) + k_{spi} \delta_{spi} \frac{\partial \delta_{spi}}{\partial \theta_i} + k_{rpi} \delta_{rpi} \frac{\partial \delta_{rpi}}{\partial \theta_i} = 0 \quad (27)$$

由公式(19)~(27)可得到由 $3(2+N)$ 个方程构成的系统的隐式微分运动方程组。

当不考虑系统中各构件的轴承刚度很大时,则此时各构件的平动位移均为零,系统运动微分方程如下:

$$\begin{cases}
 I_s \ddot{\theta}_s + \sum_{i=1}^N k_{spi} [R_s^2 (\theta_s - \theta_c) + R_s R_p \theta_i] = 0 \\
 (I_c + 3I_p + Nm_p R_c^2) \ddot{\theta}_c + \sum_{i=1}^N I_p \ddot{\theta}_i + \\
 \sum_{i=1}^N \{-k_{spi} R_s [R_s (\theta_s - \theta_c) + R_p \theta_i] + \\
 k_{rpi} R_r (R_r \theta_c + R_p \theta_i)\} = 0 \\
 I_p (\ddot{\theta}_c + \ddot{\theta}_1) + k_{sp1} R_p [R_s (\theta_s - \theta_c) + R_p \theta_1] \\
 k_{rp1} R_r (R_r \theta_c + R_p \theta_1) = 0 \\
 \dots\dots \\
 I_p (\ddot{\theta}_c + \ddot{\theta}_N) + k_{spN} R_p [R_s (\theta_s - \theta_c) + R_p \theta_N] \\
 k_{rpN} R_r (R_r \theta_c + R_p \theta_N) = 0
 \end{cases} \quad (28)$$

3.2 运动微分方程组的求解

Matlab 7.0 以上版本提供了一个新函数 ode15i() 可以直接求解隐式微分方程^[8-9]。计算时首先编写函数 fun() 来描述系统的隐式微分方程组, 然后利用函数 decic() 求解未完全定义的初始条件。最后调用 ode15i() 函数求解该微分方程得到行星传动系统的动态响应。

4 仿真与分析

某斜齿行星传动系统的太阳轮、行星轮和内齿圈齿数分别为 21、31 和 82, 行星轮个数 $N=4$, 法面模数 $m_n=3\text{ mm}$, 螺旋角 $\beta=15^\circ$, 法面压力角 $\alpha=20^\circ$, 不考虑变位, 齿轮材料密度 $\rho=7.8 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。各轴承的径向支承刚度为 $1.5 \times 10^8\text{ N/m}$, 各齿轮副啮合刚度的最小值为 $3 \times 10^8\text{ N/m}$, 最大值为 $5 \times 10^8\text{ N/m}$, 负载转矩 $T_L=40\text{ N}\cdot\text{m}$, 驱动转矩 $T_d=9.65\text{ N}\cdot\text{m}$ 。根据两种动力学模型求解得到系统第 1 个内、外啮合副的啮合变形及其频谱如图 3、图 4 所示(行星架转速 $\dot{\theta}_c(0)=80\text{ rpm}$)。由图 3 可知, 行星齿轮传动系统的内外啮合副的啮合变形波相似, 且频率成分也十分相近。由图 3、图 4 对比可知, 由两种模型计算得到的啮合副啮合变形幅值相当, 其时间响应的波形相似, 而采用新模型计算得到的啮合变形的幅值略微减小, 但是其频率成分更加丰富, 其对应频率的幅值大小也会发生变化。

4.1 轴承刚度对啮合角的影响

当取轴承径向支承刚度 $1 \times 10^{10}\text{ N/m}$, 利用本文提出的动力学模型求解得到系统的内、外啮合副的啮合变形及其频谱如图 5 所示。由图可知, 此时得到的啮合变形时域响应和频域响应与图 3 所示的几乎完全相同, 这是由于轴承支承刚度比啮合刚度大一个数量级, 因此行星齿轮系统的轴承径向振动很小, 因此对系统啮合角和啮

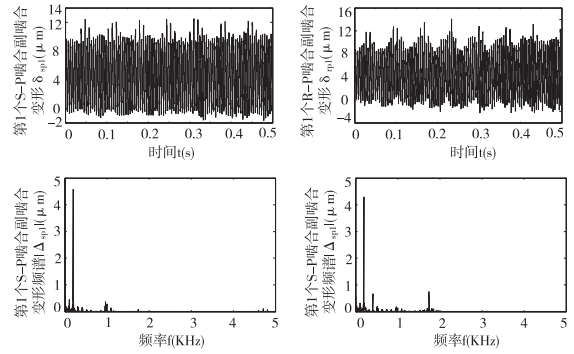


图 3 行星内、外啮合副的啮合变形及其频谱(传统模型)

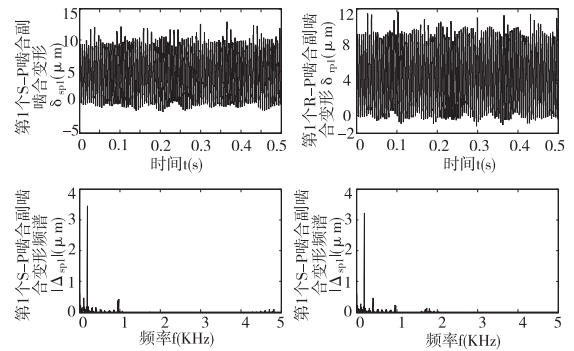
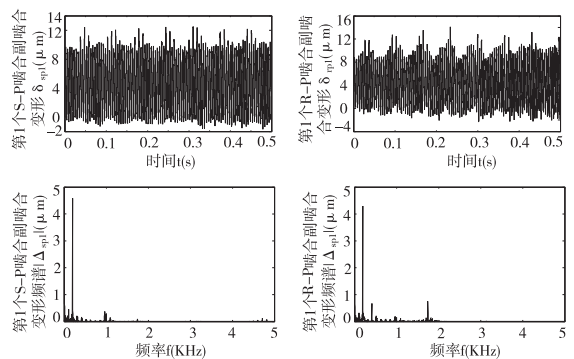


图 4 行星内、外啮合副的啮合变形及其频谱(新模型)



注: 轴承径向支承刚度为 $1 \times 10^{10}\text{ N/m}$

图 5 行星内、外啮合副的啮合变形及其频谱

合变形影响很小。

在图 4、图 5 两种情况下, 行星传动系统第 1 个外啮合副的对应的啮合角变化如图 6 所示。如图所示, 当轴承径向支承刚度与啮合刚度在同一个数量级时, 啮合角变化较大。

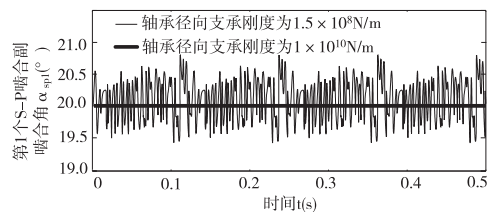


图 6 第 1 个外啮合副的对应的啮合角变化

4.2 啮合角变化对行星齿轮系统动态特性分析

4.2.1 啮合角变化对动态载荷分配系数的影响

在前述工况下,啮合角不变时第 1 条 S-P-R 支路的动态载荷分配系数如图 7 (a) 所示,啮合角变化时其动态载荷分配系数如图 7 (b) 所示。对比可知,考虑啮合角变化时,动态载荷分配系数变化幅度略微减小,但是其趋势曲线变得粗糙,频率成分更加丰富。

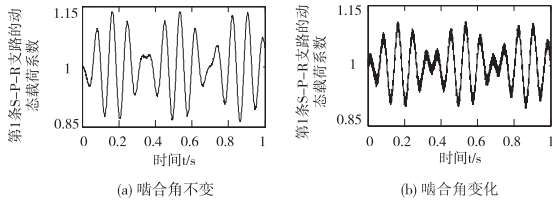


图 7 啮合角变化对动态载荷分配系数的影响

4.2.2 啮合角变化对中心构件平动位移的影响

啮合角不变时太阳轮的平动位移 x_s 、 y_s 如图 8 (a) 所示,啮合角变化时太阳轮的平动位移 x_s 、 y_s 如图 8 (b) 所示。对比可知,考虑啮合角变化时,太阳轮的平动位移更大。

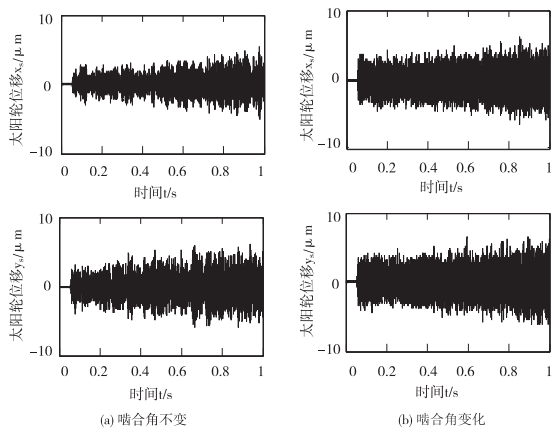


图 8 啮合角变化对太阳轮平动位移影响

5 结束语

本文根据传动齿轮的实际中心位置坐标值计算齿轮副的啮合角,从而建立了考虑啮合角变化的斜齿行星齿轮系统动力学模型。该动力学模型以传动构件的角位移作为广义坐标,因此计算得到系统的各构件的角速度和角加速度,而不是它们的振动位移及振动角速度。

采用本文提出的方法得到的系统运动微分方程为隐式微分方程,可采用 Matlab 求解该隐式微分方程获得

系统动态响应。

对比分析可知,轴承径向支承刚度与啮合刚度在同一个数量级时,啮合角变化较大,此时必须考虑啮合角变化斜齿行星齿轮系统动力学特性的影响;当啮合角变化较大时,对啮合变形幅值变化的影响不明显,但对频率成分及各频率成分的幅值有显著的影响。啮合角变化对行星齿轮系统的动态载荷分配系数及中心构件平动位移等动态特性也有明显的影响。

参考文献:

- [1] Lin J, Parker R G. Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration[J]. Journal of Vibration and Acoustics,1999,121(3):316-321.
- [2] Kahraman A. Free torsional vibration characteristics of compound planetary gear sets[J]. Mechanism and Machine Theory,2001(36):953-971.
- [3] Kim W H, Lee J Y, Chung J T. Dynamic analysis for a planetary gear with time-varying pressure angles and contact ratios[J]. Journal of Sound and Vibration,2012(331):883-901.
- [4] 张策.机械动力学[M].2版.北京:高等教育出版社,2008.
- [5] 刘增民,刘更,吴立言,等.人字齿轮啮合刚度计算与齿面载荷分布研究[J].计算机仿真,2009,26(2):298-230,353.
- [6] 李润方,王建军.齿轮系统动力学-振动、冲击、噪声[M].北京:科学出版社,1996.
- [7] Song H, Rajendra S. Dynamic transmission error prediction of Helical Gear Pair under sliding friction using Floquet Theory[J]. Journal of Mechanical Design,2008,130(5):1-9.
- [8] 王春生.随机微分方程稳定性的两种不动点方法的比较[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(4):81-84.
- [9] 薛定宇,陈阳泉.高等应用数学问题的 MATLAB 求解[M].北京:清华大学出版社,2008.

(下转第 51 页)