第 26 卷第 4 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26 No. 4
2013 年 8 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Aug. 2013
文章编号:1673-1549(2013)04-0093-04　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.04.022

二阶常系数非齐次线性微分方程特解的简便解法

李 岚

(闽西职业技术学院电气系, 福建 龙岩 364021)

摘　要:利用积分公式和微分逆算子法,推导出一类二阶常系数非齐次线性微分方程的特解公式,进而得出求此类微分方程特解的简便方法。

关键词:二阶常系数非齐次线性微分方程;特征根方程;微分算子;逆算子

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A

引　言

二阶复常系数非齐次线性微分方程的一般形式是:

$$x'' + px' + qx = f(t) \tag{1}$$

其中,p、q 是复常数,若微分方程(1)中的自由项 $f(t) = e^{\alpha t}Q_m(t)$, 则

$$x'' + px' + qx = e^{\alpha t}Q_m(t) \tag{2}$$

其中 $Q_m(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i t^i$ 是 m 次多项式, α、$a_i(i = 0,1,2,\cdots,m)$ 是复常数。

本文利用微分逆算子法推导出微分方程(2)的特解的求解公式, 并根据微分方程(2)中的自由项 $e^{\alpha t}Q_m(t)$ 的不同情况得出相应的计算公式,从而可以用简便快捷的方法求出二阶复常系数非齐次线性微分方程(2)的一个特解。

1　主要定理和性质

1.1　微分算子与逆算子及其性质

1.1.1　微分算子

记

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}, \cdots, D^k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}, \cdots$$

称 $D, D^2, \cdots D^k, \cdots$ 为微分算子,则二阶常系数线性微分方程(1)用算子符号记为:

$$(D^2 + pD + q)x = f(t) \tag{3}$$

称 $P(D) = D^2 + pD + q$ 为算子多项式,方程(3)可简记为 $P(D)x = f(t)$。

1.1.2　逆算子

微分算子多项式 $P(D)$ 的逆算子记为 $\frac{1}{P(D)}$, 它满足条件 $P(D)\left[\frac{1}{P(D)}f(t)\right] \equiv f(t)$, $\frac{1}{P(D)}f(t)$ 的结果不惟一,是一族函数。算子 D 的逆算子记为 $\frac{1}{D}$, 其意义为 $\frac{1}{D}f(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ 。

1.1.3　逆算子位移定理

逆算子位移定理为:

$$\frac{1}{P(D)}\left[e^{\lambda t}v(t)\right] = e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}v(t)$$

1.2　基本定理

一阶常系数非齐次线性微分方程为:

$$x' + px = e^{\alpha t}Q_m(t) \tag{4}$$

引理 1　设一阶常系数非齐次线性微分方程(4)对应的齐次方程的特征根为 r, 则

(ⅰ)当 $\alpha \neq r$ 时,微分方程(4)的一个特解为:

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha - r}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i\frac{1}{(\alpha - r)^i}P_j^i a_j t^{j-i} \tag{5}$$

(ⅱ)当 $\alpha = r$ 时,微分方程(4)的一个特解为:

收稿日期:2013-04-10

作者简介:李 岚(1964-),男,福建永定人,讲师,主要从事高等数学方面的研究,(E-mail)1090615490@qq.com

$$x* = e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i}{i+1}t^{i+1} \tag{6}$$

其中，P_m^n 为 m 个元素选 n 个元素的排列数，参考文献[1]已证。

定理 1 设二阶常系数非齐次线性微分方程(2)对应的齐次方程的特征根为 r_1、r_2，则

(ⅰ)当 α 不等于特征根时，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{P(\alpha)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i \frac{(\alpha-r_1)^{i+1}-(\alpha-r_2)^{i+1}}{(r_2-r_1)P^i(\alpha)}P_j^i a_j t^{j-i} \tag{7}$$

(ⅱ)当 α 等于其中一个特征根时，不妨设 $\alpha = r_2$，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha-r_1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i \frac{P_j^i}{(\alpha-r_1)^i(j-i+1)}a_j t^{j-i+1} \tag{8}$$

(ⅲ)当 α 等于特征根的重根时，即 $\alpha = r_1 = r_2$，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}t^{i+2} \tag{9}$$

证明 因为 r_1、r_2 是齐次方程的特征根，则 $r_1+r_2=-p$，$r_1r_2=q$，由逆算子移位定理及引理 1 可得

(ⅰ)当 α 不等于特征根时

$$x* = \frac{1}{(D-r_1)(D-r_2)}e^{\alpha t}Q_m(t) =$$

$$\frac{1}{(D-r_1)(D-r_2)}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}a_i t^i =$$

$$\frac{1}{D-r_1}\frac{e^{\alpha t}}{\alpha-r_2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i\frac{P_j^i}{(\alpha-r_2)^i}a_j t^{j-i} =$$

$$\frac{e^{\alpha t}}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i \frac{P_j^i}{(\alpha-r_2)^i(\alpha-r_1)^k}a_j t^{j-i} =$$

$$\frac{e^{\alpha t}}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i\left[\frac{1}{(\alpha-r_1)^i}+\frac{1}{(\alpha-r_1)^{i-1}(\alpha-r_2)}+\cdots+\frac{1}{(\alpha-r_2)^i}\right]P_j^i a_j t^{j-i} =$$

$$\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2-(r_1+r_2)\alpha+r_1r_2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i \frac{(\alpha-r_2)^i+(\alpha-r_2)^{i-1}(\alpha-r_1)+\cdots+(\alpha-r_1)^i}{(\alpha-r_1)^i(\alpha-r_2)^i}P_j^i a_j t^{j-i} =$$

$$\frac{e^{\alpha t}}{P(\alpha)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i \frac{(\alpha-r_1)^{i+1}-(\alpha-r_2)^{i+1}}{(r_2-r_1)P^i(\alpha)}P_j^i a_j t^{j-i}$$

(ⅱ)当 α 等于其中一个特征根时，不妨设 $\alpha = r_2$，

$$x* = \frac{1}{(D-r_1)(D-r_2)}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}a_i t^i =$$

$$\frac{1}{(D-r_2)}\frac{e^{\alpha t}}{(\alpha-r_1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{n}(-1)^i\frac{P_j^i}{(\alpha-r_1)^i}a_j t^{j-i} =$$

$$\frac{e^{\alpha t}}{\alpha-r_1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=i}^{m}(-1)^i\frac{P_j^i}{(\alpha-r_1)^i(j-i+1)}a_j t^{j-i+1}$$

(ⅲ)当 α 等于对应齐次方程的特征根的重根，即 $\alpha = r_1 = r_2$ 时

$$x* = \frac{1}{(D-r_1)(D-r_2)}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}a_i t^i =$$

$$\frac{1}{(D-r_1)}e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i}{i+1}t^{i+1} = e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}t^{i+2}$$

所以结论成立。

推论 1 如果二阶常系数非齐次线性微分方程(2)的自由项 $e^{\alpha t}Q_m(t)$ 中的多项式 $Q_m(t)$ 的次数 $m=0$，即 $Q_m(t)=a_0$，则

(ⅰ)当 α 不等于特征根时，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{a_0 e^{\alpha t}}{P(\alpha)} \tag{10}$$

(ⅱ)当 α 等于其中一个特征根时，不妨设 $\alpha = r_2$，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{a_0 t e^{\alpha t}}{\alpha-r_1} \tag{11}$$

推论 2 如果二阶常系数非齐次线性微分方程(2)的自由项 $e^{\alpha t}Q_m(t)$ 中多项式 $Q_m(t)$ 的次数 $m=1$，即 $Q_m(t)=a_0+a_1t$ 时，则

(ⅰ)当 α 不等于特征根时，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{P(\alpha)}\left[a_1t+a_0-\frac{2\alpha+p}{P(\alpha)}a_1\right] \tag{12}$$

(ⅱ)当 α 等于其中一个特征根时，不妨设 $\alpha = r_2$，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha-r_1}\left[\frac{a_1t^2}{2}+\left(a_0-\frac{a_1}{\alpha-r_1}\right)t\right] \tag{13}$$

推论 3 如果二阶常系数非齐次线性微分方程(2)的自由项 $e^{\alpha t}Q_m(t)$ 中多项式 $Q_m(t)$ 的次数 $m=2$，即 $Q_m(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ 时，则

(ⅰ)当 α 不等于特征根，微分方程(2)的一个特解为：

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{P(\alpha)}\left[a_2t^2+\left(a_1-\frac{2\alpha+p}{P(\alpha)}2a_2\right)t+\right.$$

$$\left(a_0-\frac{2\alpha+p}{P(\alpha)}a_1+\frac{(2\alpha+p)^2-P(\alpha)}{P^2(\alpha)}2a_2\right)\Big] \tag{14}$$

(ⅱ)当 α 等于其中一个特征根时,不妨设 $\alpha = r_2$,微分方程(2)的一个特解为:

$$x* = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha-r_1}\left[\frac{a_2t^3}{3}+\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{\alpha-r_1}\right)t^2+\left(a_0-\frac{a_1}{\alpha-r_1}+\frac{2a_2}{(\alpha-r_1)^2}\right)t\right] \tag{15}$$

只要将定理 1 中的 m 分别取 0、1 或 2,即得到推论 1、2、3。

定理 1　中的式(7)、式(8)在实际的运用中并不显得简便,但当微分方程(2)的自由项 $e^{\alpha t}Q_m(t)$ 中多项式 $Q_m(t)$ 的次数只有 0 次(1 或 2)时,根据不同的条件相应地使用式(10)~(15),便可简便快捷地计算出二阶常系数非齐次线性微分方程(2)的一个特解。

推论 4　若二阶常系数非齐次线性微分方程(1)的自由项 $f(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$,则

(ⅰ)当 $\alpha+\beta i$ 不等于特征根时,微分方程(1)的一个特解为:

$$x* = \frac{[P(\alpha)-\beta^2]\cos\beta t+\beta(2\alpha+p)\sin\beta t}{[P(\alpha)-\beta^2]^2+\beta^2(2\alpha+p)^2}e^{\alpha t} \tag{16}$$

(ⅱ)当 $\alpha+\beta i$ 等于个特征根时,微分方程(1)的一个特解为:

$$x* = \frac{te^{\alpha t}\sin\beta t}{2\beta} \tag{17}$$

推论 5　若二阶常系数非齐次线性微分方程(1)的自由项 $f(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$,则

(ⅰ)当 $\alpha+\beta i$ 不等于特征根时,微分方程(1)的一个特解为:

$$x* = \frac{[P(\alpha)-\beta^2]\sin\beta t-\beta(2\alpha+p)\cos\beta t}{[P(\alpha)-\beta^2]^2+\beta^2(2\alpha+p)^2}e^{\alpha t} \tag{18}$$

(ⅱ)当 $\alpha+\beta i$ 等于个特征根时,微分方程(1)的一个特解为:

$$x* = -\frac{te^{\alpha t}\cos\beta t}{2\beta} \tag{19}$$

证明　利用欧拉公式将非齐次线性微分方程(1)的自由项 $f(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ 化为 $f(t) = \mathrm{Re}e(\alpha+\beta i)t$,

(ⅰ)当 $\alpha+\beta i$ 不等于特征根时,由推论 1(ⅰ)的式(10)

$$x* = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\alpha+\beta i)t}}{P(\alpha+\beta i)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\alpha+\beta i)t}}{(\alpha+\beta i)^2+p(\alpha+\beta i)+q}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\alpha+\beta i)t}}{\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2+p(\alpha+\beta i)+q}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)}{P(\alpha)-\beta^2+\beta(2\alpha+p)i}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{[P(\alpha)-\beta^2]\cos\beta t+\beta(2\alpha+p)\sin\beta t}{[P(\alpha)-\beta^2]^2+\beta^2(2\alpha+p)^2}+\frac{[P(\alpha)-\beta^2]\sin\beta t-\beta(2\alpha+p)\cos\beta t}{[P(\alpha)-\beta^2]^2+\beta^2(2\alpha+p)^2}i\right\}e^{\alpha t} =$$

$$\frac{[P(\alpha)-\beta^2]\cos\beta t+\beta(2\alpha+p)\sin\beta t}{[P(\alpha)-\beta^2]^2+\beta^2(2\alpha+p)^2}e^{\alpha t}$$

(ⅱ)当 $\alpha+\beta i$ 等于其中一个特征根时,不妨设 $r_1 = \alpha-\beta i$, $r_2 = \alpha+\beta i$,由推论 1(ⅱ)的式(11)

$$x* = \mathrm{Re}\left(\frac{te^{(\alpha+\beta i)t}}{(\alpha+\beta i)-r_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{te^{(\alpha+\beta i)t}}{2\beta i}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{te^{\alpha t}i(\cos\beta t+i\sin\beta t)}{-2\beta}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{te^{\alpha t}(\sin\beta t-i\cos\beta t)}{2\beta}\right) = \frac{te^{\alpha t}\sin\beta t}{2\beta}$$

所以推论 4 结论成立,同理可证推论 5。

注　由于推论 4(ⅱ)和推论 5(ⅱ)是默认特征根方程有一对共轭特征根的条件下推出的,因此式(17)、式(19)只能在实常数系数的条件下进行应用。

2　实　例

例 1　求微分方程 $x''-2x'+5x = e^t\sin 2t$ 的特解。

解　其特征方程 $r^2-2r+5 = 0$ 的特征根是 $r_1 = 1+2i$、$r_2 = 1-2i$,由自由项 $e^t\sin 2t = \mathrm{lm}[e^{(1+2i)t}]$ 可知 $\alpha = 1$、$\beta = 2$,由于 $\alpha+\beta i$ 是特征方程的一个特征根,所以,依据推论 5 的式(19),可求得微分方程的特解为 $x* = -\frac{te^t\cos 2t}{4}$。

例 2　求微分方程 $x''+(-1+i)x'+(2+i)x = e^t\cos t$ 的特解。

解　其特征方程 $r^2+(-1+i)r+(2+i) = 0$ 的特征根是 $r_1 = 1-2i$、$r_2 = i$,特征根方程中 $p = -1+i$、$q = 2+i$,由自由项 $e^t\cos t = \mathrm{Re}[e^{(1+i)t}]$ 可知 $\alpha = 1$、$\beta = 1$,由于 $\alpha+\beta i$ 不是特征方程的特征根,所以,依据推论 4 的式(16),可求得微分方程的特解为 $x* = -\frac{e^t}{15}[(-3+4i)\cos t+(-1+3i)\sin t]$。

例 3　求微分方程 $x''+(-3+i)x'+(4-3i)x = e^t(2it-1+i)$ 的特解。

解　其特征方程 $r^2+(-3+i)r+(4-3i) = 0$ 的特征根是 $r_1 = 2+i$、$r_2 = 1-2i$,特征根方程中 $p = -3+i$、$q = 4-3i$,由自由项 $e^t(2it-1+i)$ 可知 $a_0 = -1+i$、$a_1 = 2i$、$\alpha = 1$、$m = 1$,由于 α 不是特征根方程的根,所以,依据推论 2 的式(12),可求得微分方程的特解为

$x* = \frac{e^t}{4}[(-2+2i)t-3+i]$。

例 4 求微分方程 $x''-4x'-5x=e^{-t}(9t^2-3t+10)$ 的特解。

解 其特征方程 $r^2-4r-5=0$ 的特征根是 $r_1=5$、$r_2=-1$，由自由项 $e^{-t}(9t^2-3t+10)$ 可知 $\alpha=-1$、$m=2$、$a_0=10$、$a_1=-3$、$a_2=9$，由于 α 是特征根方程的其中一个根，所以，依据推论 3 的式(15)，可求得微分方程的特解为 $x* = \frac{e^{-t}}{6}(-3t^3-10t)$。

例 5 求微分方程 $x''-3x'+5x=e^{2t}(3t^2-13t+14)$ 的特解。

解 其特征方程 $r^2-3r+5=0$ 的特征根是

$$r=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

特征根方程中 $p=-3$、$q=5$，由自由项 $e^{2t}(3t^2-13t+14)$ 可知 $\alpha=2$、$m=2$、$a_0=14$、$a_1=-13$、$a_2=3$，由于 α 不是特征根方程的根，所以，依据推论 3 的式(14)，可求得微分方程的特解为 $x* = \frac{e^{2t}}{3}(3t^2-15t+17)$。

参 考 文 献：

[1] 李 岚,一类常系数线性微分方程特解的求法[J].常州工学院学报,2012(6):54-56.

[2] Hubbard J H, West B H. Differential Equations [M]. Springer-Verlag,1993.

[3] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2006.

[4] 华东师范大学数学系.数学分析(下册)[M].3 版.北京:高等教育出版社,2002.

[5] 同济大学教研室.高等数学(下册)[M].4 版.北京:高等教育出版社,1996.

Simplified Solution to the Particular Solution of 2nd-Order Non-homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients

LI Lan

(Department of Electrical Engineering, Western Fujian Vocational and Technical College, Longyan 364021, China)

Abstract: The Integral Formula and the Differential Inverse Operator Method are used here to deduce a Particular Solution formula of a class of 2nd-order Non-homogeneous Linear Differential Equation with Constant Coefficients, therefore a simplified solution to Particular Solution of such Differential Equations is found.

Key words: Non-homogeneous Linear Differential Equations; Characteristic Root Equation; Differential Operator; Inverse Operator