第 26 卷第 4 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 4
2013 年 8 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Aug. 2013

文章编号:1673-1549(2013)04-0047-05　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.04.012

非线性扩散与小波变换的混合图像去噪算法

朱 彦, 陈明举

(四川理工学院自动化与电子信息学院, 四川 自贡 643000)

摘　要:在分析小波变换与非线性扩散之间联系的基础上,针对 Haar 小波变换阈值收缩去噪的不足,提出了基于非线性扩散与小波变换相结合的复合去噪算法。该算法对图像一次小波变换的 3 个高频先进行阈值收缩,然后对低频进行非线性扩散预处理,再进行非线性扩散。通过对比分析实验证明本模型在图像去噪中取得较高的峰值信噪比,取得了更好的图像去噪性能。

关键词:小波变换;非线性扩散;高斯平滑;图像去噪

中图分类号:TP391　　**文献标志码**:A

引　言

在各类图像获取系统中,由于图像的传输、转换、储存等影响,不可避免造成图像的降质退化,使原始图像变得模糊、失真和变形等。因此,如何提高图像视觉质量,去除噪声恢复图像的原始面目是很多学者研究的重点。图像去噪的常用方法有偏微分方程、滤波器法、形态学处理、神经网络、小波分析技术等方法。偏微分方程和小波分析技术是图像去噪处理中两种重要的方法。小波变换是把图像变化到二维小波域,用小波系数描述不同尺度的信号变化情况。在二维小波域中,噪声主要集中在高频部分,从而引起高频小波系数的波动,小波软阈值收缩去噪方法正是基于此理论[1-2]。在图像处理领域有着广泛的应用的偏微分方程法,是用一个非线性的偏微分方程描述整个过程,通过在迭代过程中将图像梯度作为扩散速度控制算子[3-5],以减少扩散对图像边缘检测的不利影响,去噪的同时较好地保留图像的信息。

Perona 与 Malik 在 1990 年提出了非线性扩散模型(P－M 模型)在图像去噪领域的研究[4],但当噪声较大时,P－M 模型是病态的。于是,Catte 等人对 P－M 模型进行了改进[5],在扩散之间对原始噪声图像进行高斯卷积平滑,使 P－M 模型具有稳态的解。多年后,Steidl 和 Weickert 证明了一次非线性扩散等效于一次 Haar 小波变换后阈值收缩[6], 并推导了收缩函数与扩散函数之间的相互关系。随后,Mrazek 和 Weickert 又证明了二维情况下非线性扩散和小波收缩的等价性[7]。

本文在分析高斯卷积、非线性扩散与 Haar 小波收缩各自的优缺点的基础上,提出一个基于小波收缩与非线性扩散相结合的混合图像去噪算法,以提高视觉效果,获得更好的峰值信噪比。

1　非线性扩散改进算法

1.1　P－M 图像去噪模型

Perona 和 Malik 在前人研究成果的基础上,以“高频部分扩散系数小,低频部分扩散系数大”为准则,将扩散系数表示成一个关于图像梯度的一个函数,提出了向异性扩散方程引入图像处理,建立了图像 P－M 扩散模型,以实现图像的平滑。模型方程为:

收稿日期: 2013-05-03

基金项目:四川省教育厅自然基金项目(13ZB0132);人工智能四川省重点实验室项目(2012RYY08);四川理工学院校级科研基金项目(2012KY16,2012KY13);四川理工学院教改项目(JG-1303)

作者简介:朱 彦(1980-),女,四川自贡人,实验师,硕士,主要从事电路与系统、数字图像处理方面的研究,(E-mail) zhuyan331@126.com

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla(g(|\nabla u|)\cdot\nabla u) \\ u(x,y) = u_0(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

其中，u_0 是输入图像，∇u 表示图像的梯度，$g(\cdot)$ 是扩散函数,用于控制扩散速度,它为递减的正函数。

P－M 扩散模型引入的扩散函数在不同梯度区域采取不同的扩散速度,在消除噪声的同时更好保留图像的细节。但是,在用 P－M 扩散方程平滑图像的过程中,有时会出现“块效应”。同时,当噪声较大时,P－M 方程的稳态解不一定具备对于初始条件的连续依赖性,P－M 方程是不稳定的,公式(1)中给出的初始条件是病态的。

于是,Catte 等人针对 P－M 扩散方程的缺点并提出如下模型加以克服:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla(g(|\nabla G_\sigma * u|)\cdot\nabla u) \\ u(x,y) = u_0(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

G_σ 在方程中是标准方差为 σ 的高斯低通滤波。由于图像本身所受噪声干扰,即在计算扩散前对图像进行一次高斯平滑。Catte 采用先对噪声图像进行平滑预处理,从而降低噪声点的梯度,这样较强的灰度阶跃能被保留了下来,此时再运用 P－M 模型进行滤波就能达到良好的效果。

而高斯核 G_σ 的选择就比较困难。这是由于高斯滤波对图像平滑的程度会受到 σ 的大小的影响，σ 太大会模糊图像的特征,如果太小,又导致扩散过程出现病态。整个图像采用相同的高斯核,在不同的梯度区域扩散强度相同,不能达不到自适应的效果。这样就很有可能让图像造成噪声消除不够或模糊图像的细节。

Hummel 指出当 $t = \dfrac{\sigma^2}{2}, t \leqslant \dfrac{1}{4}$ 时,经过高斯函数 G_σ 平滑就相当于以单尺度旋转不变 Haar 小波线性阈值处理[7]。因此,文献[8]用 haar 小波代替高斯平滑滤波器,首先用 haar 小波阈值处理图像,然后进行扩散去噪。由于小波变换具有多分辨率特性,能体现图像的局部信息,相当于对不同特征区域采用不同高斯核进行卷积,不同梯度区域扩散强度不同,以实现自适应,即克服 Catte 模型中 σ 太小导致的病态扩散过程,去噪的同时又较好的保持图像边缘。

近期的研究证明,在一定条件下,非线性扩散和小波收缩可以等价的,就是说如果选取适当的阈值函数和扩散函数,单尺度的平移不变 Haar 小波阈值和非线性扩散的一步迭代是等价的,如果将两者进行结合,会得到更好的去噪[9-10]。

1.2 Haar 小波收缩去噪

Haar 小波收缩去噪,首先对图像进行 Haar 小波,然后通过与阈值 T 的比较运算,来判定出哪些小波分解系数是由图像决定的,哪些小波系数则是由噪声带来的负面影响,这样就可以对小波系数的进行选择性处理,最后利用收缩后的小波系数对信号进行重构从而得到去噪后的图像[11]。

考虑四像素点情况,设要处理的二维图像矩阵为 $\begin{pmatrix} u_{i,j} & u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$,采用 Haar 小波进行单尺度小波收缩,Haar 小波变换用一个低通滤波器 $Lo = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 和一个高通滤波器 $Hi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 运算得到:

$$\begin{pmatrix} CA & CV \\ CH & CD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lo \\ Hi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,j} & u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} \end{pmatrix} (Lo^T \; Hi^T) \tag{3}$$

其中,是小波变换后得到的四个频带。对式(3)展开可得:

$$\begin{cases} CA = (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \\ CH = (u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) \\ CV = (u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}) \\ CD = (u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \end{cases} \tag{4}$$

对高频系数进行阈值收缩,收缩后的系数分别为 CH'、CV'、CD',重构的图像为:

$$\begin{cases} u'_{i,j} = \dfrac{CA + CH' + CV' + CD'}{2} \\ u'_{i,j+1} = \dfrac{CA + CH' - CV' - CD'}{2} \\ u'_{i+1,j} = \dfrac{CA - CH' + CV' - CD'}{2} \\ u'_{i+1,j+1} = \dfrac{CA - CH' - CV' + CD'}{2} \end{cases} \tag{5}$$

1.3 偏微分方程与小波变换的关系

在 Weickert 等人证明非线性扩散等效于 Haar 小波变换后阈值收缩的基础上,进一步研究二维小波收缩与变分模型之间的关系。

对于公式(2)的 P－M 方程,可以进一步写成:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u|)\cdot\Delta u + \nabla u\cdot\nabla g(|\nabla u|) \tag{6}$$

其中，$\nabla u = (u_x, u_y)$，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$。

对于数字图像,令网格步长为 1,扩散时间步长为 Δt,对于像素点 (i,j) 取 x 方向一阶、二阶导数分别为 $u_x = u_{i+1,j} - u_{i,j}$、$u_{xx} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}$。第 1 次迭代后的图像灰度值为 $u'_{i,j}$,可以表示为:

$$u'_{i,j} = u_{i,j} + \Delta t(g_{i,j+1} + g_{i,j})(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \Delta t(g_{i+1,j} + g_{i,j})(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \tag{7}$$

令 $\sum u = (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$,则式(7)可以表示为:

$$u'_{i,j} = \frac{\sum u}{4} + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j} - \Delta t g_{i,j})(u_{i,j} - u_{i+1,j}) + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i,j+1} - \Delta t g_{i,j})(u_{i,j} - u_{i,j+1}) + \frac{1}{4}(u_{i,j} - u_{i+1,j+1}) \tag{8}$$

同理可得

$$u'_{i,j+1} = \frac{\sum u}{4} + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j+1} - \Delta t g_{i,j+1})(u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}) + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i,j+1} - \Delta t g_{i,j})(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{1}{4}(u_{i,j+1} - u_{i+1,j}) \tag{9}$$

$$u'_{i+1,j} = \frac{\sum u}{4} + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j} - \Delta t g_{i,j})(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j+1} - \Delta t g_{i+1,j})(u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) + \frac{1}{4}(u_{i+1,j} - u_{i,j+1}) \tag{10}$$

$$u'_{i+1,j+1} = \frac{\sum u}{4} + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j+1} - \Delta t g_{i,j+1})(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) + (\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j+1} - \Delta t g_{i+1,j})(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) \tag{11}$$

为了描述方便,令

$$H_1 = (u_{i,j} - u_{i+1,j})(\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j} - \Delta t g_{i,j}) \tag{12}$$

$$H_2 = (u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1})(\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j+1} - \Delta t g_{i,j+1}) \tag{13}$$

$$V_1 = (u_{i,j} - u_{i,j+1})(\frac{1}{4} - \Delta t g_{i,j+1} - \Delta t g_{i,j}) \tag{14}$$

$$V_2 = (u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1})(\frac{1}{4} - \Delta t g_{i+1,j} - \Delta t g_{i+1,j+1}) \tag{15}$$

$$D_1 = u_{i,j} - u_{i+1,j+1}, D_2 = u_{i,j+1} - u_{i+1,j} \tag{16}$$

对 u 进行一次非线性扩散滤波可以描述一下方程:

$$\begin{cases} u'_{i,j} = \dfrac{\sum u}{4} + H_1 + V_1 + \dfrac{D_1}{4} \\ u'_{i,j+1} = \dfrac{\sum u}{4} + H_2 - V_1 + \dfrac{D_2}{4} \\ u'_{i+1,j} = \dfrac{\sum u}{4} - H_1 + V_1 - \dfrac{D_2}{4} \\ u'_{i+1,j+1} = \dfrac{\sum u}{4} - H_2 - V_2 - \dfrac{D_1}{4} \end{cases} \tag{17}$$

与小波收缩去噪方法方程比较有:

$$\begin{cases} \dfrac{CA + CH' + CV' + CD'}{2} = \dfrac{\sum u}{4} + H_1 + V_1 + \dfrac{D_1}{4} \\ \dfrac{CA + CH' - CV' - CD'}{2} = \dfrac{\sum u}{4} + H_2 - V_1 + \dfrac{D_2}{4} \\ \dfrac{CA - CH' + CV' - CD'}{2} = \dfrac{\sum u}{4} - H_1 + V_2 - \dfrac{D_2}{4} \\ \dfrac{CA - CH' - CV' + CD'}{2} = \dfrac{\sum u}{4} - H_2 - V_2 - \dfrac{D_1}{4} \end{cases} \tag{18}$$

由上面的方程组有:

$$\begin{cases} CA = \dfrac{\sum u}{2} \\ CH' = H_1 + H_2 + \dfrac{D_1 + D_2}{4} \\ CV' = V_1 + V_2 + \dfrac{D_1 - D_2}{4} \\ CD' = H_1 - H_2 + V_1 - V_2 \end{cases} \tag{19}$$

方程组(19)表明 Haar 小波收缩去噪与非线性扩散的联系,其中,CA 是 Haar 小波分解的低频部分,它在空域不进行处理;CH 是水平细节系数,它在空域要进行垂直方向的扩散,并且使用对角差值调和;CV 是垂直细节小波系数,它在空域要进行水平方向扩散,并使用对角差分进行调和;CD 是对角细节的小波系数,在空域进行两个对角方向的扩散[12]。

上述非线性扩散与 Haar 小波收缩去噪是基于四像素推导出来的,仅能体现两者局部联系。从整体来看,非线性扩散是一种从整体到局部的过程,它更好考虑像素之间的联系,而小波收缩处理,是用一个阈值对小波系数进行统一处理。因此,小波收缩去噪性能劣于非线性扩散去噪性能。

2　改进的非线性扩散去噪模型

鉴于非线性扩散计算量远大于小波收缩去噪,而小波收缩去噪对图像小波分解后,噪声集中在高频部分的,小波收缩噪只对高频部分进行了处理,低频保持不变,因此,可以对低频部分采取非线性扩散进行滤波处理,对高频部分采取软阈值收缩。这样只对图像小波分解的低频部分进行非线性扩散,相对于对整个图像进行非线性扩散算法处理,使整个运算量大幅减少,同时去除了噪声对低频的干扰。噪声主要集中在高频部分,对高频部分采用小波收缩去噪更为合理,并且充分利用了小波收缩去噪的快速性。本文混合去噪方案如下:

(1) 对噪声图像进行 Haar 小波一层分解,得到 CA、

CH、CV、CD 四个频带；

(2) CH、CV、CD 三个频带进行软阈值处理，得到处理过后的 CH'、CV'、CD'，对于每个高频小波系数 x，软阈值处理为：

$$x' = \begin{cases} O & |x| \leq T \\ x - T\mathrm{sgn}(x) & |x| > T \end{cases} \quad T \text{ 为 } D\mu$$

(3) 对低频 CA，进行 n 次非线性扩散，得到去噪后的 CA'；

(4) 对得到的新频带 CA'、CH'、CV'、CD' 进行逆扩散，得到与处理过后的图像；

(5) 对于处理过后的图像进行 n 次非线性扩散，得到最终去噪后的图像。

3 试验结果及分析

为了进一步验证本算法，选用 256×256 的灰度“cameraman”图像，加入不同强度的高斯噪声，采用不同算法进行去噪，采用峰值信噪比作为客观评价依据，实验数据见表 1。从表中可以看出，不同强度噪声干扰下，本文算法与文献[8]峰值信噪比(PSNR)较高，而本文算法相较文献[8]，PSNR 提高了 0.2 ~ 0.4 dB 左右。在主观评价方面，仍然选取“cameraman”图像，不同算法作用下的去噪效果如图 1 所示。从图 1 可以看出，P－M 结果模糊细节的同时，产生虚假边缘；Catte 模型、文献[8]算法、本文算法去噪后的图像的主观效果较接近，但本文算法更好的保留图像的细节(远处的房屋)。因而，本文算法去噪效果最优。

表 1 同一图像在不同算法消噪作用下的性能(PSNR)比较

噪声方差	噪声图像	P－M 结果	Catte 模型	文献[8]结果	本文结果
0.02	20.5278	24.2675	25.4369	26.5374	26.9823
0.05	19.84312	23.0853	24.9531	25.1262	25.5341
0.08	18.6132	20.8932	22.0942	22.9632	23.7632
0.1	16.9841	19.7539	21.43221	22.3712	22.9543

3 结 论

本文通过分析小波变换与非线性扩散的优缺点，针对 Haar 小波变换的不足，对 Haar 小波变换的低频带进行非线性扩散，再对逆变换重构后的图像进行非线性扩散。实验中，与 P－M 模型、Catte 模型以及 Catte 模型的改进算法进行对比分析，证明本文算法主客观评价上都有具有更好去噪效果，具有很好的应用前景。

(a) 原始图像 (b) 噪声图像

(c) P-M结果 (d) Catte模型

(e) 文献[8]结果 (f) 本文结果

图 1 cameraman 图像的消噪结果

参 考 文 献：

[1] 王相海，张洪为，王 爽.一种小波变换模极大值的扩散模型[J].中国图象图形学报，2011，16(6)：1080-1085.

[2] 潘 泉，孟晋丽，张 磊，等.小波滤波方法及应用[J].电子与信息学报，2007，29(1)：236-242.

[3] 陈明举，杨平先. 一种非线性复扩散与冲击滤波的图像消噪方法[J].电视技术，2011，35(19)：20-22.

[4] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans. Pat. Anal. Machine Intel., 1990, PAMI-12(7): 629-639.

[5] Catte F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM J., 1992, 29(1): 182-193.

[6] Steidl G, Weickert J, Brox T, et al. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDEs[J]. SIAM J. Numerical Analysis, 2004, 42(2): 686-713.

[7] Weiekert J, Steid1 G, Mrazek P, et al. Diffusion filters and wavelets: What can they learn from each other? Mathematieal models in comPuter vision: The Handbook[M]. Germany: Springer, 2005.

[8] 王志峰.各向异性扩散和小波相结合的图像去噪算法研究[D].哈尔滨：哈尔滨工程大学，2008.

[9] Steidl G, Weickert J. Relations between soft wavelet shrinkage and total variation denoising[C]//Luc V G. Proc.of the 24th DAGM Symposium on Pattern Recognition,Switzerland,September 16-18,2002:198-205.

[10] 武 伟,王宏志.基于双树复小波变换与非线性扩散的图像去噪[J].长春工业大学学报:自然科学版,2011,32(3):209-213.

[11] 吴亚东.图像复原算法研究[M].成都:电子科技大学出版社,2006.

[12] 吴亚东,孙世新.基于二维小波收缩与非线性扩散的混合图像去噪算法[J].电子学报,2006,34(1):163-167.

Hybrid Image Denoising Algorithm Based on Nonlinear Diffusion and Wavelet Transform

ZHU Yan, *CHEN Ming-ju*

(School of Automation and Electronic Information, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Through the discussion of relation between the wavelet transformation and anisotropic diffusion, an improved hybrid denoising algorithm that combines anisotropic diffusion and wavelet transformation is proposed according to shortcomings of threshold shrinkage denoising in the Haar wavelet domain. The improved model use Haar wavelet transform the image, and threshold shrink the high frequency band, then anisotropic diffuse the low frequency band to get preprocessed image and anisotropic diffuse the preprocessed image. The experiment results show that this new model gains higher peak signal noise ratio and has better performance of image restoration.

Key words: wavelet transformation; anisotropic diffusion; Gaussian smoothing; image denoising

---

(上接第 39 页)

Dynamic Modeling and Analysis of Helical Planetary Gears System with Time-varying Pressure Angles

ZHANG Jie[1,2], *LIAO Ying-hua*[1,2], *HUANG bo*[1,2]

(1. Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;

2. Sichuan Provincial key Lab. of Process Equipment & Control, Zigong 643000, China)

Abstract: When bearing deformation is considered, central positions of gears will be deviated from theoretical centers and the gear pairs have time-varying pressure angles. In order to reduce the complexity of the model, the pressure angles are regarded as constants in the traditional dynamic model of helical planetary gears, so it can't show effects of change of the pressure angles and contact ratio on dynamic characteristics of system. In order to analysis the effects, the pressure angles and contact ratios are denoted by practical central positions of gear pairs to establish a new dynamic model of helical planetary gears, and the differential equations of motion are computed by Matlab software, then the dynamic responses of system are obtained. The simulation results show that there is a obvious impact of time-varying pressure angles on dynamic characteristics of helical planetary gears.

Key words: helical planetary gears system; time-varying pressure angle; dynamic modeling; dynamic response