

严格对角占优 M - 矩阵的最小特征值的下界

蒋建新

(文山学院数理系, 云南 文山 663000)

摘 要:利用严格对角占优 M -矩阵的逆矩阵主对角元的估计式与非奇异 M -矩阵的最小特征值 $\tau(A)$ 的下界估计式, 给出严格对角占优 M -矩阵的最小特征值新的且易于计算的估计式。

关键词:严格对角占优矩阵; M -矩阵; 最小特征值; 迭代矩阵

中图分类号: O151.21

文献标志码: A

引 言

对角占优矩阵是计算数学中应用非常广泛的矩阵类, 它较多出现于经济价值模型和反网络系统的系数矩阵及解某些确定微分方程的数值解法中, 在信息论、系统论、现代经济学、网络、算法、程序设计和工程技术等众多领域都有十分重要的应用, 如在均衡论, 投入产出分析的研究中产生的 M -矩阵; 在控制论及神经网络大系统的稳定性, 线性对滞系统的稳定性研究中需要 H -矩阵; 求解线性方程组 $Ax = b$, 当系数矩阵 A 为对角占优矩阵时, 则可设计出好的计算方法^[1-3]。鉴于对角占优矩阵这些重要的应用, 所以研究这类矩阵的性质, 界的估计等问题就非常的必要。本文研究严格对角占优 M -矩阵的最小特征值的下界。

定义 1^[4] 设 $Z^{n \times n} = \{A = (a_{ij}) \mid A \in R^{n \times n}, a_{ij} \leq 0, \forall i, j \in N, i \neq j\}$, 则称 $Z^{n \times n}$ 的矩阵 A 为 Z -矩阵。

定义 2^[4] 设 A 为 Z -矩阵, 若 $A^{-1} \geq 0$ (A^{-1} 为非负矩阵), 则称 A 为非奇异 M -矩阵。

定义 3^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 如果成立 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$, 则称 A 为行严格对角占优矩阵; 如果 A^T 是行严格对角占优矩阵, 则称 A 为列严格对角占优矩阵。

定义 4^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ 分裂为 $A = D - C$ (D 为 A 的对角矩阵, 即 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$), 则称 $J_A = D^{-1}C$ 为 A 的迭代矩阵。

引理 1^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格对角占优矩阵, 则 $\rho(J_A) = \rho(D^{-1}C) < 1$ ($\rho(J_A)$ 是 J_A 的谱半径), 即 Jacobi 迭代法收敛。

定义 5^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是非负矩阵, 则 A 的最小特征值 $\tau(A) = [\rho(A^{-1})]^{-1}$, 其中 $\rho(A^{-1})$ 是非负矩阵 A 的谱半径。

为后面引理, 定理的需要引入以下记号:

$C^{n \times n}$ ($R^{n \times n}$) 表示 $n \times n$ 复 (实) 矩阵的集合,

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$$C_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

$$d_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$$h_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

$$s_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k}{|a_{jj}|}, j \neq i, i, j \in N$$

$$t_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| h_k}{|a_{jj}|}$$

收稿日期: 2013-04-09

基金项目: 文山学院重点学科建设资助项目 (12WSXK01)

作者简介: 蒋建新 (1981-), 男, 甘肃天水人, 讲师, 硕士, 主要从事矩阵理论与微分方程方面的研究, (E-mail) jwencely@126.com

$$r_{li} = \frac{a_{li}}{|a_{li}| - \sum_{k \neq l, i} |a_{lk}|}, l \neq i, r_i = \max_{l \neq i} \{r_{li}\}, i \in N$$

$$c_{il} = \frac{|a_{il}|}{|a_{il}| - \sum_{k \neq l, i} |a_{kl}|}, l \neq i, c_i = \max_{l \neq i} \{c_{il}\}$$

$$m_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| r_i}{|a_{ji}|}, m_i = \max_{l \neq i} \{m_{ji}\}$$

$$n_{ij} = \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{kj}| c_i}{|a_{ij}|}, n_i = \max_{l \neq i} \{n_{ij}\}$$

文献[5-6]给出关于行(列)严格对角占优矩阵 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 的逆矩阵 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 的非主对角元素的一些不等式,并且这些不等式互不相容,当 A 是行严格对角占优矩阵时:

$$|\alpha_{ji}| \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k}{|a_{ji}|} |\alpha_{ii}|, i, j \in N, i \neq j \quad (1)$$

$$|\alpha_{ji}| \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| r_i}{|a_{ji}|} |\alpha_{ii}|, i, j \in N, i \neq j \quad (2)$$

当 A 是列严格对角占优矩阵时:

$$|\alpha_{ij}| \leq \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{kj}| h_k}{|a_{ij}|} |\alpha_{ii}|, i, j \in N, i \neq j \quad (3)$$

$$|\alpha_{ij}| \leq \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{kj}| c_i}{|a_{ij}|} |\alpha_{ii}|, i, j \in N, i \neq j \quad (4)$$

1 主要结果

定理1 (1) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\frac{1}{a_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} d_j} \leq \frac{1}{R_i(A)} \quad (5)$$

(2) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\frac{1}{a_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} t_{ij}} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} h_j} \leq \frac{1}{C_i(A)} \quad (6)$$

证明 情形(1): 因为 A 是严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} \geq 0, A \cdot A^{-1} = I, 1 = a_{ii} \alpha_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} \alpha_{ji}$, 一方面隐含了 $\frac{1}{a_{ii}} \leq \alpha_{ii}$ 。另一方面由(1)式知

$$\alpha_{ji} \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k}{|a_{ji}|} \alpha_{ii} = s_{ji} \alpha_{ii}$$

因为 $0 \leq s_{ji} < 1$, 则

$$1 \geq a_{ii} \alpha_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji} \alpha_{ii} = (a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}) \alpha_{ii}$$

即 $\alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}}$ 。则(5)式得证。

情形(2)的证明类似。

应用(2)式与(4)式类似定理1的证明得定理2。

定理2 (1) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\frac{1}{a_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} m_{ji}} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} d_j} \leq \frac{1}{R_i(A)} \quad (7)$$

(2) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\frac{1}{a_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} t_{ij}} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} h_j} \leq \frac{1}{C_i(A)} \quad (8)$$

引理2^[7] 设 $M = (m_{ij})$ 是非奇异的 M -矩阵, $N = (n_{ij})$ 是与 M 具有相同阶数的非负矩阵, 则 $\rho(M^{-1}N)$ 满足:

(1) 若 M 是行严格对角占优矩阵, 则

$$\min_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n n_{ij}}{m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij}} \right\} \leq \rho(M^{-1}N) \leq \max_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n n_{ij}}{m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij}} \right\}$$

(2) 若 M 是列严格列对角占优矩阵, 则

$$\min_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n n_{ji}}{m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ji}} \right\} \leq \rho(M^{-1}N) \leq \max_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n n_{ji}}{m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ji}} \right\}$$

若 $N = M - A, M$ 是非奇异的 M -矩阵, N 是非负的, 则 $M^{-1}N = J_A$

$$\min_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}}{a_{ii}} \right\} \leq \rho(J_A) \leq$$

$$\max_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}}{a_{ii}} \right\} \min_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}}{a_{ii}} \right\} \leq \rho(J_A) \leq \max_{i \in N} \left\{ \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}}{a_{ii}} \right\}$$

引理3^[7] 设 $A = (a_{ij})$ 是非奇异的 M -矩阵, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 则

$$\tau(A) \geq \frac{1}{1 + (n-1)\rho(J_A)} \cdot \frac{1}{\max_{i \in N} \alpha_{ii}}$$

其中 $\rho(J_A)$ 是 A 的 Jacobi 迭代矩阵 J_A 的谱半径。

定理3 (1) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优的 M -矩阵, 则

$$\tau(A) \geq \frac{1}{1 + (n-1) \max_{i \in N} d_i} \min_{i \in N} \{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji} \}$$

(2) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优的 M -矩阵, 则

$$\tau(A) \geq \frac{1}{1 + (n - 1) \max_{i \in N} h_i} \min_{i \in N} \{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ji} t_{ij} \}$$

证明 情形(1):一方面因为 A 是行严格对角占优的

M -矩阵,则由定理 1 知 $\alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}}$, 即

$$\max_{i \in N} \alpha_{ii} \leq \max_{i \in N} \frac{1}{a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}} = \frac{1}{\min_{i \in N} (a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji})}$$

所以

$$\frac{1}{\max_{i \in N} \alpha_{ii}} \geq \min_{i \in N} (a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} s_{ji}) \tag{9}$$

另一方面由引理 2 知 $\rho(J_A) \leq \max_{i \in N} d_i$, 则

$$\frac{1}{1 + (n - 1) \rho(J_A)} \geq \frac{1}{1 + (n - 1) \max_{i \in N} d_i} \tag{10}$$

将(9)式与(10)式代入引理 3 知不等式成立。

情形(2)的证明类似。

定理 4 (1) 设 A 是行严格对角占优的 M -矩阵,则

$$\tau(A) \geq \frac{1}{1 + (n - 1) \max_{i \in N} d_i} \min_{i \in N} \{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} m_{ji} \}$$

(2) 设 A 是列严格对角占优的 M -矩阵,则

$$\tau(A) \geq \frac{1}{1 + (n - 1) \max_{i \in N} h_i} \min_{i \in N} \{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ji} n_{ij} \}$$

2 数值算例

设

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.1 & -0.1 \\ -0.3 & 1.0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

容易验证 A 是严格对角占优的 M -矩阵,应用定理 3 知 $\tau(A) \geq 0.3534$;应用定理 4 知 $\tau(A) \geq 0.3524$;应用

参考文献[7]中的推论 3.4 知 $\tau(A) \geq 0.3033$ 。所以此算例说明本文提高了参考文献[7]中的相应结果,并且这些估计式更容易计算。

参考文献:

- [1] 刘新,杨晓英.M 矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值的新下界[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(2):84-87.
- [2] 李艳艳,李耀堂.严格对角占优 M -矩阵的逆矩阵的无穷范数上界的估计[J].云南民族大学学报:自然科学版,2012(1):52-56.
- [3] 李艳艳.M-矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界的估计[J].四川理工学院学报:自然科学版,2013,26(1):76-78.
- [4] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences [M]. SIAM Press: Philadelphia, 1994.
- [5] Li Houbiao, Huang Tingzhu, Li Hong. Lower bounds for the eigenvalue of Hadamard product of an M -matrix and its inverse[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 420: 235-247.
- [6] Li Yaotang, Chen Fubin, Wang Defeng. New lower bounds on eigenvalue of the Hadamard product of an M -matrix and its inverse[J]. Linear Algebra Appl. 2009, 430: 1423-1431.
- [7] Tian Guixian, Huang Tingzhu. Inequalities for the minimum eigenvalue of M -matrices[J]. Electronic Journal of Linear Algebra 2010, 20: 291-302.

Lower Bounds of Minimum Eigenvalue of Strictly Diagonally Dominant M -Matrix

JIANG Jian-xin

(Department of Mathematics and Physics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract: Based on the estimation formula of the diagonal elements for the inverse matrix of strictly diagonally dominant M -matrix, and the lower bounds estimation formula of minimum eigenvalue $\tau(A)$ of the nonsingular M -matrix, some new estimation that easy to calculate of minimum eigenvalue of strictly diagonally dominant M -matrix are obtained.

Key words: strictly diagonally dominant matrix; M -matrix; minimum eigenvalue; iterative matrix