第 26 卷第 2 期　四川理工学院学报(自然科学版)　Vol. 26 No. 2
2013 年 4 月　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　Apr. 2013
文章编号:1673-1549(2013)02-0089-05　DOI:10.3969/j. issn. 1673-1549. 2013. 02. 022

Maxwell 方程的低阶混合稳定化有限元方法

李　敏, 周国霞, 陈豫眉

(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘　要:通过使用一些新的项去调整 *Maxwell* 问题的拉格朗日鞍点,得到了 *Maxwell* 问题的一种新的稳定方法。基于不稳定空间中 *LBB* 条件的缺失,新的稳定方法提供了一些新的计算性质。

关键词:混合稳定方法; *Maxwell* 问题; inf - sup 条件

中图分类号:O242. 28　**文献标志码**:A

引　言

Maxwell 方程是电磁学领域中最重要的方程之一,被广泛应用于电机、电器工程、无线通讯、海洋磁场探测技术和激光脉冲传导等问题的研究中。对于 *Maxwell* 方程经典的求解方法是采用傅立叶变换,但有时却无法得到其精确解。由于 *Maxwell* 方程在工程计算中的广泛应用,因此研究其数值解尤为重要。

混合有限元方法是求解 *Maxwell* 方程数值解的方法之一。文献[1]中将混合有限元方法分为两类:一是构造离散的有限元空间 U_h 和 V_h 满足离散 *LBB* 条件; 二是对原来的混合变分格式进行稳定化处理。由于混合有限元方法要求离散有限元空间满足 *LBB* 条件,这一条限制了工程中常用的低阶有限元空间对,如: p_1/p_1, p_1/p_0 等。为了克服 *LBB* 条件,文献[2]给出了 *Stokes* 方程的一种局部绝对稳定化有限元方法,文献[3]给出了低阶压力投影稳定化有限元方法,文献[4 -5]给出了 *Stokes* 方程和 *Navier — Stokes* 的低阶混合有限元方法,文献[6]将局部压力梯度投影和间断有限元法相结合对 *Stokes* 问题和可压 *Navier — Stokes* 方程提出了一种稳定化间断有限元格式。文献[7]对 *Maxwell* 方程、*Stokes* 方程和 *Darcy* 方程给出了混合稳定化有限元方法的统一描述。文献[8]对 *Maxwell* 方程给出了局部 L^2 投影有限元法。文献[9]对 *Maxwell* 方程采用了混合间断 *Galerkin* 有限元方法。文献[10]采用了内罚方法,但该方法要求计算高阶导数,较复杂。本文在文献[4]的基础上修正了方程的拉格朗日鞍点格式,并加入了与投影相关的新的稳定项,从而去掉了 *LBB* 条件限制,这种新方法不需要计算高阶导数,也不需要计算与边界相关的数据结构,并且是无条件稳定的。

设 $\Omega \in R^2$ 表示一个有界连通区域, $H_m(\Omega)$, $\|\cdot\|$, $(\,,\,)_m (m \geqslant 0)$ 分别代表 *Sobolev* 空间及空间的范数和内积, $H_0^1(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 的子空间,并且在边界上的迹为 0。定义空间

$$H(curl;\Omega): = \{v \in [L^2(\Omega)]^2; \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^2\}$$

$$H_0(curl;\Omega): = \{v \in H(curl;\Omega); (\vec{n} \times v)\ |_{\Gamma} = 0\}$$

且范数为:

$$\|v\|_{curl}: = \|v\|_0 + \|\nabla \times v\|_0$$

1　有限元空间

考虑形状规则的仿射网格,设 $T_h = \{K\}$ 为 Ω 上的拟一致三角剖分, K 是三角形单元 $\Gamma = \partial\Omega$, 对于每一个 $T \in T_h$, 有: $h = \max_K h_K$, 其中, h 是每个三角形单元的最大直径。且 $\forall K \in T_h$, 有: $\dfrac{h}{diam(K)} \leqslant C$, 代表 $diam(K)$ 每个三角形单元内切圆的直径, C 为确定的常

收稿日期:2013-01-25

基金项目:西华师范大学基金项目(10B013)

作者简介:李 敏(1986-),女,山西应县人,硕士生,主要从事偏微分方程数值解方面的研究,(E-mai)1046017119@ qq. com

数。有限元空间 $P_1(K)$ 和 $Q_1(K)$ 分别代表单元 K 上所有阶数不超过 1 的多项式构成的空间和所有各维变量阶数都不超过 1 的多项式构成的空间。

$$P_1 = \{u_h \in C^0(\Omega) \mid u_h|_K \in P_1(K); \forall K \in T_h\}$$

$$Q_1 = \{u_h \in C^0(\Omega) \mid u_h|_K = \hat{u}_h \circ F^{-1}; \hat{u}_h \in Q_1(\hat{K})\}$$

其中, $\hat{K}$ 为仿射单元, $F:\hat{K}\to K$ 为仿射变换, $\forall K \in T_h$ 用 R_1 表示 P_1 或 Q_1。定义分片线性常数空间 R_0:

$$R_0 = \{q_h \in H_0^1(\Omega) \mid q_h|_K \in P_0(K); \forall K \in T_h\}$$

其中, $P_0(K)$ 表示单元 K 上的零次多项式空间。R_0 满足不等式: $\forall q \in H^1(\Omega)$, 存在 $q_h \in R_0$, 使得 $\|q - q_h\|_0 \leqslant Ch\|q\|_1$, 逆不等式

$$\|\nabla q_h\|_0 \leqslant Ch^{-1}\|q_h\|_0$$

假定 $\prod$ 是 $H_0^1(\Omega) \to R_0$ 的连续线性算子,则有

$$\left\|\nabla(I - \prod)_p\right\|_0 \leqslant \|p\|_2,\ \forall p \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

$$\left\|\nabla(\prod{}_p)\right\|_0 \leqslant C\|\nabla p\|_0,\ \forall p \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

2 *Maxwell* 问题的混合有限元方法

考虑如下形式的 *Maxwell* 方程

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times u) - \nabla p = f, in\Omega \\ \nabla \cdot u = 0, in\Omega \\ n \times u = 0, on\Gamma \\ p = 0, on\Gamma \end{cases} \tag{3}$$

其中, Ω 是 R^2 上有界连通的 *Lipschitz* 多角形区域, n 代表边界上得的外法向量, u、p 分别代表电场和拉格朗日乘数, $f \in L^2(\Omega)^2$ 是给定的源项, $V = H_0(curl;\Omega)$ 和 $Q = H_0^1(\Omega)$ 分别代表 u 和 p 所在的有限元空间。方程(3)的混合变分格式为: $(u,p) \in (V \times Q)$, 满足

$$Q(u,p,v,q) = F(v,q),\ \forall (v,q) \in V \times Q$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla \times u \cdot \nabla \times v d\Omega$$

$$b(v,p) = \int_\Omega \nabla p \cdot v d\Omega$$

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v d\Omega$$

$$Q(u,p,v,q) = a(u,v) + b(v,p) + b(u.p) \tag{4}$$

a 是双线性的, b 是连续线性的且满足连续的 inf - sup 条件。(4)式的一阶拉格朗日函数的鞍点格式为:

$$L(v,p) = \int_\Omega |\nabla \times v|^2 d\Omega + \int_\Omega \nabla p \cdot v d\Omega - \int_\Omega f \cdot v d\Omega \tag{5}$$

定义离散的有限元空间为:

$$V_h \subset H_0(curl;\Omega), S_h \subset H_0^1(\Omega)$$

本文考虑的混合稳定的有限元空间为:

$$V_h = R_1 \cap H(curl;\Omega), S_h = R_1 \cap H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

要求 V_h 和 S_h 满足离散 inf - sup 条件

$$\sup_{v_h \in V_h, v_h \neq 0} \frac{b(p_h,v_h)}{\|v_h\|_{curl}} \geqslant r\|p_h\|_1,\ \forall p_h \in S_h$$

其中 $r > 0$, 且独立于 h。

3 预备知识

引理 1 $\forall p_h \in S_h$, 存在 $\nu \subset H_0(curl;\Omega)$, 使得

$$\sup_{\nu \subset H_0(curl;\Omega), v_h \neq 0} \frac{b(p_h,\nu)}{\|\nu\|_{curl}} \geqslant r\|p_h\|_1$$

证明 由 $v \subset H_0(curl;\Omega)$, 得 $\|v\|_{curl} = \|v\|_0 + \nabla \times v_0$, 令 $v = \nabla p$, 则 $curlv = curl(\nabla p) = 0$

$$\|v\|_{curl} = \|v\|_0 = \|\nabla p\|_0$$

$$\sup_{v \subset H_0(curl;\Omega), v_h \neq 0} \frac{b(p_h,v)}{\|v\|_{curl}} =$$

$$\sup_{v \subset H_0(curl;\Omega), v_h \neq 0} \frac{\int \nabla p_h \cdot \nabla p_h d\Omega}{\|v\|_{curl}} \geqslant \frac{\|\nabla p_h\|_0^2}{\|v\|_{curl}} = \|\nabla p_h\|_0$$

引理 2 若 $(v_h,p_h) \in V_h \times S_h$, 则存在 C_1, C_2, 使得

$$\sup_{v \subset V_h, v_h \neq 0} \frac{\int \nabla p_h \cdot v_h d\Omega}{\|v_h\|_{curl}} \geqslant C_1\|p_h\|_1 - C_2 h\|\nabla p\|_0$$

证明 $\forall p_h \in S_h$, 存在 $w \subset H_0(curl;\Omega)$ 满足引理 1,即

$$\int_\Omega \nabla p_h \cdot w d\Omega \geqslant C_1\|p_h\|_1\|w\|_{curl}$$

w_h 表示 w 的分片多项式内插值,利用引理 1 得

$$\|w - w_h\|_0 + h^{\frac{1}{2}}\|w - w_h\|_\Gamma \leqslant Ch\|w\|_{curl}$$

$$\|w_h\|_{curl} \leqslant C\|w\|_{curl} \tag{7}$$

由(7)式得

$$\frac{\left|\int_\Omega \nabla p_h \cdot w_h d\Omega\right|}{\|w\|_{curl}} \geqslant \frac{\left|\int_\Omega \nabla p_h \cdot w_h d\Omega\right|}{C\|w\|_{curl}} =$$

$$\frac{\left|\int_\Omega \nabla p_h \cdot (w_h - w) d\Omega + \int_\Omega \nabla p_h \cdot w d\Omega\right|}{C\|w\|_{curl}} \geqslant$$

$$\frac{\int_\Omega \nabla p_h \cdot w d\Omega}{C\|w\|_{curl}} - \frac{\int_\Omega \nabla p_h \cdot (w_h - w) d\Omega}{C\|w\|_{curl}} \geqslant$$

$$\frac{C_1}{C}\|\nabla p_h\|_0 - \frac{\|\nabla p_h\|_0\|w_h - w\|_0}{C\|w\|_{curl}} \geqslant$$

$$C_1\|p_h\|_1 - C_2 h\|\nabla p_h\|_0$$

引理 3 若 $(v_h,p_h) \in V_h \times S_h$, 则存在独立于 h 的常数 C_1, C_2 使得

$$\sup_{v \subset V_h} \frac{\int \nabla p_h \cdot v_h d\Omega}{\|v_h\|_{curl}} \geqslant$$

$C_1\|p_h\|_1 - C_2\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0$，$\forall p_h \in S_h$

证明　由于在每个单元 K 上 $\prod p_h$ 是常数，因此 $\nabla(\prod p_h)|_K = 0$，使用逆不等式可得

$$h^2\|\nabla p_h\|_0^2 = \sum_K h^2\|\nabla p_h\|_{0,K}^2 = \sum_K h^2\left\|\nabla(p_h - \prod p_h)\right\|_{0,K}^2 \tag{8}$$

由(8)式和引理 2，引理 3 得证。

4　稳定性

引入稳定项 $-\dfrac{\varepsilon}{2}\|\nabla(I-\Pi)p\|_0^2$ 弥补空间(6)式中 inf －sup 条件的不足，将该项添加到(5)式，得到变化后对应的拉格朗日函数：

$$L_\varepsilon(v,q) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega|\nabla\times v|^2 d\Omega + \int_\Omega \nabla q\cdot v d\Omega - \int_\Omega f\cdot v d\Omega - -\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla(I-\Pi)q\|_0^2$$

$L_\varepsilon(v,q)$ 的鞍点满足如下的变分格式

$$a(\tilde{u},v) + b(\tilde{p},v) = F(v_h),\ \forall v_h \in H_0(curl;\Omega)$$

$$b(q,\tilde{u}) - G(\tilde{p},q) = 0,\ \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

$$G(\tilde{p},q) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega(\nabla(I-\Pi)\tilde{p})(\nabla(I-\Pi)\tilde{q})d\Omega$$

其等价于：求 $(v_h,p_h) \in V_h\times S_h$，满足

$$a(u_h,v_h) + b(p_h,v_h) = F(v),\ \forall v \in H_0(curl;\Omega)$$

$$b(q_h,u_h) - G(p_h,q_h) = 0,\ \forall q_h \in H_0^1(\Omega)$$

即

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) = F(v_h,q_h) \tag{9}$$

引理 4　$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h)$ 连续，即

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) \leqslant C(\|u_h\|_{curl} + \|p_h\|_1)(\|v_h\|_{curl} + \|q_h\|_1)$$

证明　由(1)式得

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) = a(u_h,p_h) + b(p_h,v_h) + b(q_h,u_h) - G(p_h,q_h) \leqslant \|\nabla\times u_h\|_0\|\nabla\times v_h\|_0 + \|\nabla p_h\|_0\|v_h\|_{curl} + \|\nabla q_h\|_0\|u_h\|_{curl} + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\left\|\nabla(I-\prod)q_h\right\|_0 \leqslant C_1\|u_h\|_{curl}\|v_h\|_{curl} + C_2\|p_h\|_1\|v_h\|_{curl} + C_3\|q_h\|_1\|u_h\|_{curl} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla p_h\|_0\|\nabla q_h\|_0 = C(\|u_h\|_{curl} + \|p_h\|_1)(\|v_h\|_{curl} + \|q_h\|_1)$$

引理 4 得证。

定理 1　$(v_h,p_h) \in V_h\times S_h$，则存在独立于 h 的正常数 C，使得

$$\sup_{(v_h,q_h)\in V_h\times S_h} = \frac{Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h)}{\|v_h\|_{curl} + \|q_h\|_1} \geqslant C(\|u_h\|_{curl} + \|p_h\|_1)$$

证明　构建 (v_h,p_h) 满足

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) \geqslant C(\|u_{h\,curl}\| + \|p_{h\,1}\|)(\|v_h\|_{curl} + \|q_{h\,1}\|)$$

令 $(v_h,p_h) = (u_h,-p_h)$，得

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) = a(u_h,u_h) + b(p_h,u_h) + (-p_h,u_h) - G(p_h,-p_h) = a(u_h,u_h) + G(p_h,p_h) = \|\nabla\times u_h\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0^2 \tag{10}$$

对于 $\forall p_h \in S_h$，w_h 可标准化为

$$\|\nabla\times w_h\|_0 = \nu\|\nabla p_h\|_0$$

由引理 3，可得

$$\int_\Omega \nabla p_h\cdot w_h d\Omega \geqslant C_1\|\nabla p_h\|_0^2 - C_2 h\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\|\nabla p_h\|_0 \tag{11}$$

又令 $(v_h,p_h) = (-\alpha w_h,0)$（其中 α 为正常数），得

$$Q_h(u_h,p_h;v_h,q_h) = -\alpha\int_\Omega\nabla\times u_h\cdot\nabla\times w_h d\Omega + \alpha\int_\Omega\nabla p_h\cdot w_h d\Omega \geqslant -\alpha\|\nabla\times u_h\|_0\|\nabla\times w_h\|_0 + \alpha(C_1\|\nabla p_h\|_0^2 - C_2 h\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\|\nabla p_h\|_0) \geqslant -\alpha\nu\|\nabla\times u_h\|_0\|\nabla p_h\|_0 + \alpha(C_1\|\nabla p_h\|_0^2 - C_2 h\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\|\nabla p_h\|_0) \tag{12}$$

令 $(v_h,p_h) = (u_h-\alpha w_h,-p_h)$，则由(10)式～(12)式，得

$$Q_h(u_h,p_h;u_h-\alpha w_h,-p_h) \geqslant \|\nabla\times u_h\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0^2 + \alpha C_1\|\nabla p_h\|_0^2 - \alpha\nu\|\nabla\times u_h\|_0\nabla p_h\|_0 - \alpha C_2 h\left\|\nabla a(I-\prod)p_h\right\|_{00}\nabla p_h\|_0$$

令 $\varepsilon = \dfrac{C_1}{2}$，由 ε 不等式得

$$\nu\|\nabla\times u_h\|_0\|\nabla p_h\|_0 \leqslant \frac{\nu^2}{C_1}\|\nabla\times u_h\|_0^2 + \frac{C_1}{4}\|\nabla p_h\|_0^2 C_2 h\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\|\nabla p_h\|_0^2 \leqslant \frac{C_2^2h^2}{C_1}\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0^2 + \frac{C_1}{4}\|\nabla p_h\|_0^2$$

整理得

$$Q_h(u_h,p_h;u_h-\alpha w_h,-p_h) \geqslant$$

$$\left(1-\frac{\alpha\nu^2}{C_1}\right)\|\nabla\times u_h\|_0^2+\frac{\alpha C_1}{2}\|\nabla p_h\|_0^2+$$
$$\left(\frac{\xi}{2}-\frac{\alpha C_2^2h^2}{C_1}\right)\left\|\nabla(I-\prod)P_h\right\|_0^2$$

若 $\hat{\alpha}=\min\left\{\frac{C_1}{2\nu^2},\frac{\xi C_1}{4C_2^2h^2}\right\}$, 则以下不等式成立

$$\left(1-\frac{\hat{\alpha}\nu^2}{C_1}\right)\geqslant\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{\xi}{2}-\frac{\hat{\alpha}C_2^2h^2}{C_1}\right)\geqslant\frac{1}{2}$$

令 $\hat{v}_h=u_h-\hat{\alpha}w_h$, $\hat{q}_h=-\hat{p}_h$, 由 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}$, 可得

$$Q_h(u_h,p_h;\hat{v}_h,\hat{q}_h)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(\|\nabla\times u_h\|_0^2+\hat{\alpha}C_1\|\nabla P_h\|_0^2+\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0^2\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{6}\left(\|\nabla\times u_h\|_0+\sqrt{\hat{\alpha}C_1}\|\nabla P_h\|_0+\left\|\nabla(I-\prod)p_h\right\|_0\right)^2\geqslant$$
$$C(\|\nabla\times u_h\|_0+\|\nabla P_h\|_0)^2$$

和

$$\|\nabla\times v_h\|_0+\|\nabla P_h\|_0=$$
$$\|\nabla\times(u_h-\hat{\alpha}w_h)\|_0+\|\nabla P_h\|_0\leqslant$$
$$\|\nabla\times u_h\|_0+\hat{\alpha}\|\nabla\times w_h\|_0+\|\nabla P_h\|_0\leqslant$$
$$\|\nabla\times u_h\|_0+\hat{\alpha}\nu\|\nabla P_h\|_0+\|\nabla P_h\|_0\leqslant$$
$$C(\|\nabla\times u_h\|_0+\|\nabla P_h\|_0) \tag{13}$$

(13)式说明 $(\hat{v}_h,\hat{q}_h)$ 是 (u_h,p_h) 在 $H(curl,\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 中的下界,故定理 1 得证。

结合引理 4 和定理 1,(9)式是稳定的变分问题得证。

5 误差估计

定理 2 若 $(v_h,p_h)\in V_h\times S_h$, (u,p) 和 (u_h,p_h) 分别是(3)和(9)式的解,则

$$\|u-u_h\|_{curl}+\|p-p_h\|_1\leqslant$$
$$C(\inf_{q_h\in S_h}\|p-p_h\|_1+\inf_{v_hV_h}\|u-u_h\|_{curl}+$$
$$\|\nabla(I-\Pi)P\|_0$$

证明 因为 $(V_h\times S_h)$ 是 $H_0(curl;\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 的一个子空间,则可得

$$a(u,v_h)+b(p,v_h)=F(v_h),\forall v_h\in V_h$$
$$b(q_h,u)=0,\ \forall q_h\in S_h \tag{14}$$

(14)式与(9)式相减得

$$a(u_h-u,v_h)+b(p_h-p,v_h)=0,\forall v_h\in V_h$$
$$b(q_h,u_h-u)=G(p_h,q),\forall q_h\in S_h$$

或者等价于

$$Q_h(u_h-u,p_h-p;v_{h,}q_h)=$$
$$G(p_h,q),\forall(v_h,q_h)\in V_h\times S_h$$

由弱正则性得

$$C(\|u_h-w_h\|_{curl}+\|p_h-r_h\|_1)\leqslant$$
$$\sup_{(v_h,q_h)\in V_h\times S_h}\frac{Q(u_h-w_h,p_h-r_h;v_{h,},q_h)}{\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_{1l}}=$$
$$\sup_{(v_h,q_h)\in V_h\times S_h}$$
$$\frac{Q(u_h-u,p_h-p;v_h,q_h)+Q(u-w_h,p-r_h;v_h,q_h)}{\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_1}=$$
$$\sup_{(v_h,q_h)\in V_h\times S_h}\frac{G(p,q_h)+Q(u-w_h,p-r_{h;}v_h,q_h)}{\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_1}$$

由连续性可得

$$Q_h(u_h-u,p_h-p;v_{h,}q_h)\leqslant$$
$$C(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1)(\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_1)$$

因为

$$\|\nabla(\Pi p_h)\|_0\leqslant C\|p\|_0$$

得

$$G(p,q_h)\leqslant CG(p.p)^{\frac{1}{2}}\|\nabla q_h\|_0$$

则存在正常数 C 使得

$$C(\|u_h-w_h\|_{curl}+\|p_h-r_h\|_1)\leqslant$$
$$sup_{(v_h,q_h)\in V_h\times S_h}$$
$$\frac{G(p,p)^{\frac{1}{2}}\|\nabla q_h\|_0+(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1)(\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_1)}{\|v_h\|_{curl}+\|q_h\|_l}\leqslant$$
$$G(p,p)^{\frac{1}{2}}+(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1)=$$
$$(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1)+\|\nabla(I-\Pi)P\|_0$$

利用三角不等式,得

$$\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1\leqslant$$
$$(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1)+$$
$$(\|u_h-w_h\|_{curl}+\|p_h-r_h\|_1)\leqslant$$
$$C(\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1+\|\nabla(I-\Pi)p\|_0)$$

结合假设(1)式,(9)式的解的收敛性得证。

推论 1 假设 $(u,p)\in(H_0(curl;\Omega)\cap H^2(\Omega))\times(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 是原问题的解,则存在与 h 无关的正常数 C 使得

$$\|u-w_h\|_{curl}+\|p-r_h\|_1\leqslant$$
$$Ch(\|u\|_2+\|p\|_2)$$

参 考 文 献:

[1] Franca L P,Hughes J R.Two classes of mixed nite element methods[J].Comput.Methods Appl.Mech.Engrg.,1988,69:89-129.

[2] 祁瑞生,冯民富,刘 丹.Stokes 方程的局部绝对化稳定有限元方法[J].四川大学学报,2010,47:436-440.

[3] 刘 红,谢春梅,冯民富.拟牛顿流的压力投影稳定化有限元方法分析[J].四川大学学报,2011,48:753-759.

[4] Bochev B,Dohrmann R,Gunzburger D.Stabilization of low-order mixed finite elements for the stokes equation [J].SIAM J.Numer.Anal.,2006,44:82-101.

[5] 张 莉,冯民富.Navier-Stokes 方程的的低阶混合有限元法[J].高等学校计算数学学报,2009,31:97-108.

[6] 骆 艳,冯民富.Stokes 方程的压力梯度局部投影间断有限元法[J].计算数学,2008(1):25-35.

[7] Badia S,Codina R,Stokes.Maxwell and Darcy:A single finite element approxima-tion for three model problems [J].Appl.Numer.Math.,2012,62:246-263.

[8] Duan H Y,Feng J,Lin P,et al.The local L2 projected C 0 finite element method for Maxwell problem[J].SIAM J. Numer.Anal.,2009,47:1274-1303.

[9] Houston P,Perugia I,Schotzau D.Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator[J]. SIAM J.Numer.Anal.,2004,42:434-459.

[10] Houston P,Perugia I,Schneebeli A,et al.Interior penalty method for the inde finite time-harmonic Maxwell equations[J].Numer.Math.,2005,100:485-518.

Stabilization of Lower Mixed Finite Elements for the *Maxwell* Equation

LI Min, *ZHOU Guo-xia*, *CHEN Yu-mei*

(College of Mathematics & Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: Some new items are used to adjust the lagarange saddle point of the *Maxwell* problems. A new method for stability of the Maxwell problem is got, based on the *LBB* condition of in the unstable space. New stable method provides some new properties.

Key words: stabilized mixed method; *Maxwell* problem; inf-sup condition