第 26 卷第 2 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 26 No. 2
2013 年 4 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2013
文章编号:1673-1549(2013)02-0098-03 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.02.024

基-可数仿紧空间

周 兴,王 宪,孙 文

(成都理工大学管理科学学院,成都 610059)

摘 要:文章研究基-可数次仿紧空间,得出:①如果 $\{F_i\}_{i\in \mathrm{N}}$ 是空间 X 的一个 δ-离散闭覆盖,对于任意一个相对于 X 的闭集 $F_i(i\in N)$ 是闭的基-可数次仿紧子空间,则称 X 是基-可数次仿紧空间;②令 g: $X\to Y$ 是基-可数次仿紧的一个映射,$\omega(X)\geqslant\omega(Y)$,若 Y 是基-可数次仿紧空间并且是正则的,则 X 是基-可数次仿紧空间。将拓扑空间的仿紧性质的一个结果推广到拓扑空间的次仿紧性质领域,使得关于拓扑空间的次仿紧性质应用起来更方便,该结果使得次仿紧性质和仿紧性质之间的关系更加清楚。

关键词:闭空间;基-可数次仿紧映射;δ- 离散空间;基;基-可数次仿紧空间

中图分类号:TB115 **文献标志码**:A

Proter J. E 阐述了基-仿紧空间,而且研究了基-仿紧空间的一些刻画。在拓扑空间中,离散拓扑空间是一种最简单的,但是它在整个拓扑学中起着非常重要的作用,所以离散拓扑空间的一些性质很重要。次仿紧空间中某些好的性质在相应的局部次仿紧空间中仍成立。文章以基-仿紧空间为基础得出了基-可数次仿紧空间的定义,而且对基-可数次仿紧空间的相关性质进行了初步的探讨。

文章中涉及到的映射都为连续的并且是满射,用符号 g 表示。集合 $\{U\in\cup:U\cap A\neq\phi\}$ 和集合 A 的开邻域用 $(\cup)_A$ 和 $N(A)$ 表示;尤其集合 $(\cup)_{\{x\}}$ 和 $N(\{x\})$ 的开邻域用 $(\cup)_x$ 和 $N(x)$ 表示。自然数集为 N,集合 A 的势用 $|A|$ 表示,空间 X 基底的最小势为 $\omega(X)$,简称为拓扑势,满足 $(A,U)=\cup(U)_A$,$St(x,U)=\cup(U)_{\{x\}}$。另外没有作说明的拓扑学术语参考文献[1-2]。

1 基本定义

定义 1 空间 X 称为基-仿紧空间,若 X 的基 B,使得 $|B|=\omega(X)$,X 的任意一个开覆盖 $\cup$,均存在 $B\supset B'$,满足 B' 是 $\cup$ 的局部有限的开加细[3-4]。

定义 2 集族 $\cup$ 和 V 均为 X 的一个覆盖,若对任意一个 $V\in V$,存在 $U\in U$ 满足 $U\supset V$,那么称集族 V 是 $\cup$ 的一个部分加细;若有 $\cup V=\cup U$,那么称 V 是 $\cup$ 的一个加细[5-6]。

定义 3 空间 X 的一个集族 $\cup$ 为局部有限的,若 $\forall x\in X$,$\exists$ x 的一个邻域 O_x 最多与 $\cup$ 中可数个元相交。另外,对任意的 $x\in X$,存在 $x\in N(x)$,使得 $|(\cup)_{O_x}|<\omega$[2]。

定义 4 空间 X 称为基-仿紧空间,若 $\exists X$ 的基 B,并满足 $|B|=\omega(X)$,对于 X 的任意一个开覆盖 $\cup$,均 $\exists B\supset B'$,满足 B' 是 $\cup$ 的有限的局部开加细[3]。

定义 5 空间 X 的基底的最小势,称为拓扑势,简记 $\omega(X)$[1]。

定义 6 称映射 $g:X\to Y$ 为基-可数次仿紧映射,若 $\exists X$ 的一个基 B,使得 $|B|=\omega(X)$ 成立,而且每一个 $y\in Y$ 以和 $g^{-1}(y)$ 在 X 中的每一个可数开覆盖 $\cup$,均

收稿日期:2013-01-17
基金项目:安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2010SQRL158)
作者简介:周 兴(1987-),男,安徽池州人,硕士生,主要从事拓扑学方面的研究,(E-mail)1097591915@qq.com

$\exists y$ 的一个开邻域 O_y 和 $\cup$ 的部分闭加细 $B \supset B_y$, 满足 $g^{-1}(O_y) \subset \cup B_y$, 而且 B_y 是 δ - 离散的。

定义 7　对于 X, 空间 X 的一个子集 A 称为基-可数次仿紧的,若 $\exists X$ 的基 B, 满足 $|B| = \omega(X)$, 且 X 中对于 A 的任意一个可数开覆盖 $\cup$(有一个开集族覆盖 A), 均使得 $B \supset B'$, 并且 B' 是 $\cup$ 的一个 δ- 离散部分闭加细且 $\cup B' \supset A$。

定义 8　空间 X 称基-可数次仿紧空间,若 $\exists X$ 的基 B, 满足 $|B| = \omega(X)$, 对 X 中的任意一个可数开覆盖 $\cup$, 均 $B \supset B'$, 并且 B' 是 $\cup$ 的 δ - 离散闭加细。

定义 9　空间 X 称为基-次仿紧空间,若 $\exists X$ 的基 B, 使得 $|B| = \omega(X)$, 对于 X 的任意的开覆盖 $\cup$, 均 $\exists B \supset B'$, 有 B' 是 $\cup$ 的一个 δ- 离散闭加细。

引理 1　集 A 是基-可数次仿紧空间 X 的一个闭子集,则 A 相对于 X 是基-可数次仿紧的。

证明　若 A 是基-可数次仿紧空间 X 的一个闭子集,令 B 是 X 的一个基,满足 $|B| = \omega(X)$, A 在 X 中的任意一个可数开覆盖 $\cup$, 则 $U \cup \{X \backslash A\}$ 是 X 的一个可数开覆盖,因为 X 是基-可数次仿紧空间,则 $\exists B \supset B'$, 满足 B' 是开覆盖 $U \cup \{X \backslash A\}$ 在 X 中为一个离散空间,那么 $W = \{B \in B' : B \cap M \neq \phi\}$ 是 $\cup$ 的一个 δ- 离散部分开加细,使得 $A \subset \cup W$。

2　主要结论及其证明

定理 1　拓扑空间 X 是基-可数次仿紧的充要条件是 $\exists X$ 的开空间基 B, 取 $|B| = \omega(X)$, 对 X 的任意一个可数开覆盖 $\cup = \{U_i\}_{i \in N}$, 均 $\exists B \supset B'$, 满足 $B' = \{B_i\}_{i \in N}$ 是 $\cup$ 的一个 δ - 离散开加细,使得 $U_i \Leftrightarrow B_i$。

证明　充分性:若 $U = \{U_i\}_{i \in N}$ 是基-可数次仿紧空间 X 的一个可数开覆盖,那么 $\exists$ 一个开基 B, 使得 $|B| = \omega(X)$, 并且 $B^* \subset B$ 是 $\cup$ 的一个 δ - 离散开加细。取 $B^* = \{B\}$, 对任意一个 $B \in B^*$, 使得 $U_i \supset B$。取 $B_i = \cup\{B : B \in B^*\}$, 那么 $\{B_i\}_{i \in N}$ 是离散空间。那么 $\{B_i\}_{i \in N}$ 是离散空间。有 $\{B_i\}_{i \in N}$ 是 $\cup$ 的加细,使得 $U_i \supset B_i$。

必要性:由于 $B \supset B'$, $B' = \{B_i\}_{i \in N}$ 是 $\cup$ 的一个离散可数开加细空间,那么 X 是基-可数次仿紧的。

定理 2　若 A 是基-可数次仿紧空间 X 的一个闭子集,使得 $\omega(X) = \omega(A)$, 那么 A 为一个基-可数次仿紧空间。

证明　根据引理 1 可以得到 X 的一个闭子集 A 对于 X 是基-可数次仿紧的,由于 $X \supset A$, X 的一个闭集是 A, 有 $\omega(X) = \omega(A)$, 那么 A 是一个基-可数次仿紧空间。

定理 3　若 $g: X \to Y$ 是基-可数次仿紧空间映射,而且 $\omega(X) \geqslant \omega(Y)$, 若 Y 是一个正则的基-可数次仿紧,则 X 是基-可数次仿紧的。

证明　令 B_Y 是 Y 的一个基-可数次仿紧的基, B_X 是 X 的一个相对于 g 的基-可数次仿紧的基,设 $B = B_X \cap g^{-1}(B_Y)$, 那么 B 为 X 的一个基。因为 $\omega(Y) \leqslant \omega(X)$, 所以 $|B| = |B_X| = \omega(X)$。

令 $\cup$ 是 X 的一个可数开覆盖。由于 B_X 是 X 的对于 g 满足基-可数次仿紧的基,则 $\forall y \in Y$ 以。$\exists y$ 的一个开邻域 O_y 和 $\cup$ 的部分加细 $B_X \supset B_y$, 有 $\cup B_y \supset g^{-1}(O_y)$, 那么 B_y 在 X 中是 δ - 离散的空间。由于 Y 是正则空间,所以 $\exists y$ 的一个开邻域 V_y, 使得 $y \in V_y \subset \bar{V}_y \subset O_y$, 则 $g^{-1}(y) \subset g^{-1}(V_y) \subset g^{-1}(\bar{V}_y) \subset g^{-1}(O_y) \subset \cup B_y$。令 $V^* = \{V_y : y \in Y\}$, 那么 V^* 覆盖于 Y。因为 Y 是基-可数次仿紧空间,可令 V^* 是可数的开覆盖,所以 $\exists$ 一个 $B'_Y \subset B_Y$ 是离散开加细,记 $B'_Y = \{B'_s : s \in N\}$。对 $\forall s \in N$, $\exists$ 一个 $y_s \in Y$, 满足 $B'_s \subset V_{ys}$。令集族 $B' = \cup\{B_{ys} \cap f^{-1}(B'_s) : B_{ys} \in B_{ys}, B'_s \in B'_Y, s \in N\}$, 那么 $B' \subset B$ 并且 B' 开加细 $\cup$。

定理 4　若 $\{F_i\}_{i \in N}$ 是空间 M 的一个 δ - 离散闭覆盖,任意一个闭集 $F_i (i \in N)$ 是相对于 M 的基-可数次仿紧闭子空间,那么 M 是基-可数次仿紧空间。

证明　(1)若 $M = \bigcup_{i \in N} F_i$, 任意的 F_i 均相对于 M 的基-可数次仿紧闭子空间。

(2)若任意的 $i \in N$, 有 M 的基 B_i, 那么 F_i 相对于 X 是基-可数次仿紧的。

(3)若 $B = \bigcup_{i \in N} B_i$, 那么 B 是 M 的一个基,使得 $|B| = \omega(M)$。

(4)对于 B, 任意的 $i \in N$, F_i 对于 M 是一个基-可数次仿紧的基。

(5)若 $\cup = \{U_i\}_{i \in N}$ 是 M 的任意的一个可数开覆盖,对每个 $x \in A$, 令 $O_{i(x)} \subset U_i$, 那么有 $x \in O_{i(x)}$, 并且 $\{x\} \subset O_{i(x)}$, $i(x) = i$, $U_i \in \cup$。

(6)若 $V = \{O_{i(x)} : x \in M, i(x) = i\}_{i \in N}$, 那么 V 是 M 的一个可数开覆盖且加细 U。

(7)任意的 $i \in N$, 因为 F_i 相对于 M 的一个基 B 是基-可数次仿紧的,所以 $\exists B'_i \subset B$, 有 B'_i 在 M 中是 δ- 离散部分开加细 $\cup$ 而且有 $F_i \subset \cup B'_i$。

(8)取 $B' = \bigcup_{i \in N} B'_i \subset B$, 证明 B' 是 δ- 离散且加

细 ∪ 即可。

其实，B' 是 M 的一个 δ-离散。因为 $M = \bigcup_{i \in N} F_i \subset \bigcup B'_i$，所以 $B' = \bigcup_{i \in N} B'_i$ 加细 ∪。

参考文献:

[1] 蒋继光.一般拓扑学专题选讲[M].成都:四川教育出版社,1995.

[2] 高国士.拓扑空间论[M].北京:科学出版社,2000.

[3] ENGELKING R. General Topology[M]. Berlin: Heldermann,1989.

[14] porter J E. Base-paracompact spaces[J]. Topology and Its Applications,2003,128:145-156.

[5] 付传秀,周建新.基-可数仿紧空间[J].贵州大学学报,2007,24(3):225-228.

[6] 蒲保明,蒋继光,胡淑礼.拓扑学[M].北京:高等教育出版社,1985.

Base-countably Subparacompact Spaces

ZHOU Xing , *WANG Xian*, *SUN Wen*

(School of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: The notion of base-countably subparacompact space is introduced and the following results are proved: ① If $\{F_i\}_{i \in N}$ is $\delta-discrete$closed cover of X, and each $F_i(i \in N)$ is a closed base-countably subparacompact subspace relative to X, then X is a base-countably subparacompact space. ②Let g: $X \to Y$ be a base-countably subparacompact mapping and $\omega(X) \geqslant \omega(Y)$ and Y be a base-countably subparacompact space and if Y is regular then X is base-countably subparacompact space. A result of the paracompactness of topology space is generalized to the subparacompactness of topology space, making the subparacompactness of topology space applicable more conveniently. The result makes the relation between paracompactness and subparacompactness clearer.

Key words: closed space; base-countably subparacompact mapping; δ-*discrete*spaces; base; base-countably subparacompact spaces