文章编号:1673-1549(2013)01-0095-03 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.023

基于历史索赔不同分布的信度估计

张 强[1], 崔倩倩[1], 张 娟[2]

(1.石河子大学理学院, 新疆 石河子 832003; 2.廊坊师范学院经济学院, 河北 廊坊 065000)

摘 要:基于加权平衡损失函数和 Esscher 损失函数,考虑在给定条件下历史时期的保费仅在相互独立的情形时,得到信度因子表达式,并以此给出了下一期的信度保费。

关键词:加权平衡损失;Esscher 损失函数;信度因子

中图分类号:O211 **文献标志码**:A

信度模型是在非寿险精算中对未来保费的厘定具有重要意义,发展已有 80 多年。它的主要思想是通过结合投保人个人的索赔经历与先验保费来共同决定保费,所制定的保费为两者的加权和[1]。

为了计算各种情况下的信度保费,广大学者建立了各种各样的信度模型,多数是在假设历史时期的保费在给定条件下是相互独立同分布的。Hans U Gerber[2]在指数加权损失函数下得到了 Esscher 保费的信度估计。Pan Maolin[3]指出该保费估计不具有相合性,修正了文献[2]的结果,得到了具有相合性的 Esscher 信度保费公式。Centeno Lourdes[4]考虑了方差保费原理下的信度估计问题,Kamps Udo[5]引入 Esscher 损失函数讨论了保费原理,Furmana Edward[6]更进一步在损失函数基础上研究了加权保费原理。

最近,王伟[7]比较了 Esscher 保费原理下信度估计,给出了更完善的结果。在大多数文献中,通过选取不同的损失函数来研究信度估计问题[8-10]。然而,在大量的研究成果中,并没有考虑历史索赔不是同分布的情形。在实际中,各时期的历史数据不一定是同分布的,本文给出一种非同分布的假设,得到了只考虑相互独立条件下的信度模型。

1 加权平衡损失函数下的信度保费

令 X_j 表示某个投保个体第 j 个时期的历史索赔数据,其中 $j = 1,2,\cdots,n_i$, 类似于文献[9]中的假设,认为该个体未来索赔 X_{n_i+1} 是由所有历史索赔数据 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 决定的。本文考虑的模型假设如下。

假设 1 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是由风险参数 Θ 决定的, Θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$。

假设 2 给定 $\Theta,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的,且有 $\mathrm{Var}(X_j \mid \Theta) = \tau_j(\Theta) + \varphi_j v(\Theta)$, $E(X_j \mid \Theta) = \beta_j\mu(\Theta)$。

目标是基于历史索赔数据 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数 $\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots\alpha_n X_n$ 来预测下一期的保费 X_{n+1}。记 $\mu = E[\mu(\Theta)]$, $v = E[v(\Theta)]$, $\tau_j = E[\tau_j(\Theta)]$, $a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$。从而可得到

$$E(X_j) = \beta_j\mu$$

$$\mathrm{Var}(X_j) = \tau_j + \varphi_j v + \beta_j^2 a$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \beta_i\beta_j a, i \neq j$$

在均方损失函数 $L(x,p) = (x-p)^2$ 下得到信度保费公式

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j = (1-Z)E(X_{n+1}) + Z\beta_{n+1}\bar{X} \tag{1}$$

其中

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m}\frac{X_j}{\beta_j}$$

$$Z = am(1+am)^{-1}$$

$$m = m_1 + \cdots m_n$$

$$m_j = \beta_j^2(\tau_j + \varphi_j v)^{-1}$$

收稿日期:2012-12-19

作者简介:张 强(1984-),男,河北张家口人,硕士,主要从事保险精算方面的研究,(E-mail)zhangqiang189291@163.com

考虑加权平衡损失函数

$$L(x,p) = wh(x)(\delta_0(x) - p)^2 + (1-w)h(x)(x-p)^2$$

其中 $\delta_0(x)$ 是观测数据的函数, $0 \leqslant w \leqslant 1$ 是一个加权因子。求解最小化问题

$$E\{wh(x)[\delta_0(x) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)^2] + (1-w)h(x)[\beta_{n+1}\mu(\Theta) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)^2]\} \quad (2)$$

可得如下定理。

定理 1 在假设 1、2 下,求解问题(2)得到 X_{n+1} 的最优估计为:

$$\hat{X}_{n+1} = w\delta_0(x) + (1-w)[Z\beta_{n+1}\bar{X} + (1-Z)X_{n+1}] \quad (3)$$

其中 $Z = am(1+am)^{-1}$ 称为信度因子。

证明 令最小化问题(2)为 Q, 由 $\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0$ 得

$$2E\{w[\delta_0(x) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)](-1) + (1-w)[\beta_{n+1}\mu(\Theta) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)^2](-1)\} = 0$$

整理化解可得

$$E(\mu(\Theta)) = \frac{\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j\beta_j\mu - w\delta_0(x)}{(1-w)\beta_{n+1}} \quad (4)$$

由于

$$E(X_{n+1}) = E[E(X_{n+1}) \mid \Theta] = E(\beta_{n+1}\mu(\Theta)) = \beta_{n+1}\mu$$

所以(4)式蕴含着

$$E(X_{n+1}) = \frac{\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j\beta_j\mu - w\delta_0(x)}{1-w} \quad (5)$$

对 $i = 1,2,\cdots,n$, 令 $\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = 0$ 有

$$2E\{w[\delta_0(x) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)](-X_i) + (1-w)[\beta_{n+1}\mu(\Theta) - (\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j)^2](-X_i)\} = 0$$

即

$$E(X_i X_{n+1}) = \frac{\tilde{\alpha}_0\beta_i\mu + \sum_{j=1}^{n}E(X_i X_j) - w\delta_0(x)\beta_i\mu}{1-w} \quad (6)$$

在给定 Θ 下, X_i 和 X_{n+1} 是相互独立的,(5)式两端同时乘以 $E(X_i)$ 有

$$E(X_i)E(X_{n+1}) = \frac{\tilde{\alpha}_0 E(X_i) + \sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j E(X_i)E(X_j)}{1-w} - \frac{w\delta_0(x)E(X_i)}{1-w} \quad (7)$$

进一步对于 $i = 1,2,\cdots,n$, 有

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1}) = \frac{1}{1-w}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \quad (8)$$

结合假设 2,通过式(5)、式(8)可得:

$$\tilde{\alpha}_j = a\frac{\beta_i}{\mu}(\tilde{\alpha}_0 - w\delta_0(x))(\tau_j + \varphi_j v)^{-1} \quad (9)$$

从而

$$\tilde{\alpha}_0 = w\delta_0(x) + (1-w)\frac{\beta_{n+1}\mu}{1+ma} \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式,有 $\tilde{\alpha}_j = (1-w)\frac{\beta_{n+1}\mu}{1+ma}m_j$, 于是有基于加权平衡损失函数下的信度保费公式为

$$\hat{X}_{n+1} = w\delta_0(x) + (1-w)\left[\frac{\beta_{n+1}\mu}{1+ma} + \left(1 - \frac{ma\beta_{n+1}}{1+ma}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{m}\frac{X_j}{\beta_j}\right] = w\delta_0(x) + (1-w)[Z\beta_{n+1}\bar{X} + (1-Z)X_{n+1}]$$

注 如果假设 $\beta_j = 1, \tau_j = 1, \varphi_j = 1$, 此时所得结果便是独立同分布假设下的结果。事实上,定理 1 是经典模型的推广。

2 Esscher 损失函数下的信度保费

通过在 Esscher 损失函数下建立信度模型,计算相应的最优线性保费。Esscher 损失函数的形式为: $L(x,p) = e^{hx}(x-p)^2$, 在假设的条件下,讨论情形为: $p = C_0 + C\bar{X}$。为推导简便,给出以下定义:

$$H(X_{n+1}) = \frac{E(X_{n+1}e^{hX_{n+1}})}{E(e^{hX_{n+1}})} \quad H(X_{n+1} \mid \Theta) = \frac{E(X_{n+1}e^{hX_{n+1}} \mid \Theta)}{E(e^{hX_{n+1}} \mid \Theta)}$$

对任意的函数 $g(\Theta)$, 有

$$E^*[g(\Theta)] = \frac{E[g(\Theta)m_h(\Theta)]}{E[m_h(\Theta)]}$$

$$E^*[g(X_{n+1})] = E^*\{E[g(X_{n+1}) \mid \Theta]\}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{E^*[(X_1 - E^*(X_1))(X_2 - E^*(X_2))m_h(\Theta)]}{E[m_h(\Theta)]}$$

定理 2 假设 1、2 及上述的定义下,在 Esscher 损失函数的信度估计为

$$\hat{X}_{n+1} = Z^*\bar{X} + \left[1 - \bar{\beta}Z^*\frac{E^*(\mu(\Theta))}{H(X_{n+1})}\right]H(X_{n+1})$$

其中

$$Z^* = \frac{\bar{\beta}\mathrm{Cov}^*(H(X_{n+1}), \mu(\Theta))}{\bar{\beta}^2\mathrm{Var}^*(\mu(\Theta)) + \frac{1}{n}E\left[\sum_{j=1}^{n}\tau_j(\Theta)\frac{m_h(\Theta)}{m_h}\right] + \bar{\varphi}E\left[v(\Theta)\frac{m_h(\Theta)}{m_h}\right]}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j$$

证明 考虑最小化问题

$$L = E\{[X_{n+1} - (C_0 + C\bar{X})]^2 e^{hX_{n+1}}\} \tag{11}$$

对 C_0 求导,并令其导数为 0, 化简有

$$C_0 = H(X_{n+1}) - C\bar{\beta}E^*(\mu(\Theta)) \tag{12}$$

在这里 $\bar{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j$。将式(12)代入式(11)中,有

$$L = E\{X_{n+1} - H(X_{n+1}) - C(\bar{X} - \bar{\beta}E^*(\mu(\Theta)))^2 e^{hX_{n+1}}\}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial C} = 0$, 得

$$C = \frac{E\{X_{n+1} - H(X_{n+1})(\bar{X} - \bar{\beta}E^*(\mu(\Theta)))^2 e^{hX_{n+1}}\}}{E[(\bar{X} - \bar{\beta}E^*(\mu(\Theta)))^2 e^{hX_{n+1}}]}$$

对 C 化简有

$$C = \frac{\bar{\beta}\mathrm{Cov}^*(H(X_{n+1}),\mu(\Theta))}{\bar{\beta}^2\mathrm{Var}^*(\mu(\Theta)) + \frac{1}{n}E\left[\sum_{j=1}^{n}\tau_j(\Theta)\frac{m_h(\Theta)}{m_h}\right] + \bar{\varphi}E\left[v(\Theta)\frac{m_h(\Theta)}{m_h}\right]}$$

令 $C = Z^*$, 此时有下一期线性信度保费为

$$\hat{X}_{n+1} = C_0 + C\bar{X} = Z^*\bar{X} + \left[1 - \bar{\beta}Z^*\frac{E^*(\mu(\Theta))}{H(X_{n+1})}\right]H(X_{n+1})$$

3 结束语

本文仅在投保人历史数据相互独立的条件下,考虑了加权平衡损失函数和 Esscher 损失函数下的估计问题,分别给出了相应的线性信度保费计算公式,推广了经典的 Bühlmann 信度模型。

参 考 文 献:

[1] Buhlmann Hans, Gisler Alois. A course in credibility theroy and its applications[M]. Springer, Netherlands, 2005.

[2] Hans U Gerber, Ann Arbor. Credibility for Esscher premium[J]. Mitleilungen der VSVM, 1980, 80(3): 307-312.

[3] Pan Maolin, Wang Rongming, Wu Xianyi. On the consistency of credibility premiums regarding Esscher principle[J]. Insurance:Mathematical and Economics, 2008, 42(1):119-126.

[4] Centeno Lourdes. The Bühlmann-Straub Model with the premium calculated according to the variance principle[J]. Insurance:Mathematical and Economics, 1989, 8(1):3-10.

[5] Kamps Udo. On a class of premium principles including the Esscher principle[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1998(1):71-85.

[6] Furmana Edward, Zitikisb Ricardas. Weighted premium calculation principles[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(1):850-854.

[7] 王 伟,温利明,章 溢.Esscher 保费原理下信度估计的比较[J].华东师范大学学报:自然科学版,2010(3):126-133.

[8] Gomez Deniz Emilio. A generalization of the credibility theory obtained by using the weighted balanced loss function[J]. Mathematics and Economics, 2008, 42(2):850-854.

[9] 温利民,林 霞,王静龙.平衡损失函数下的信度模型[J].应用概率统计,2009,25(5):553-560.

[10] 杨 涛.广义加权 Esscher 损失函数下的信度保费[D].乌鲁木齐:新疆大学,2010.

Credibility Estimator Based on the History Claims with Different Distributions

ZHANG Qiang[1], *CUI Qianqian*[1], *ZHANG Juan*[2]

(1. College of Sciences, Shihezi University, Shihezi 832003, China;

2. School of Economics, Langfang Teachers College, Langfang 065000, China)

Abstract: Considering that historical period of the premiums is independent of each other, the credibility factor expression based on the balanced weighted loss function and Esscher loss function is got, and the next issue of the credibility premium is derived.

Key words: balanced weighted loss; Esscher loss function; credibility factor