第 26 卷第 1 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 26 No. 1
2013 年 2 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2013
文章编号:1673-1549(2013)01-0098-03 DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.024

几类新空间的性质及其相互间的关系

幸华雄, 杨思鑫, 吴昭鑫

(成都理工大学应用数学系, 四川 成都 610059)

摘 要:在 1-仿紧、2-仿紧、3-仿紧、0^{**}-仿紧、0^{*}-仿紧以及强仿紧的基础上引入了 1-base-仿紧、2-base-仿紧、3-base-仿紧、0^{**}-base-仿紧、0^{*}-base-仿紧以及强-base-仿紧的概念。讨论了它们的性质及它们与其它空间类的关系。

关键词:1-base-仿紧;2-base-仿紧;3-base-仿紧;0^{**}-base-仿紧;0^{*}-base-仿紧

中图分类号:O189.11 **文献标志码**:A

引 言

John E. Porter 在文献[1]中定义了基-仿紧空间,并研究了基-仿紧空间的性质.彭良雪引入了几种新空间类并对其性质关系进行了初步探讨[2]。本文在此基础上引入了几种新空间类,并对其性质及关系做了初步研究,文中未做声明的拓扑学术语及相关结论见文献[3-8]。

$\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的开加细:对任意 $V \in \mathscr{V}$, 都存在 $U \in \mathscr{U}$, 使得 $V \subset U$, 且 $\cup \mathscr{V} = \cup \mathscr{U}$。

$\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的弱开加细:对任意 $V \in \mathscr{V}$, 都存在 $U \in \mathscr{U}$,使得 $V \subset U$, 且 $\cup \mathscr{V} \subset \cup \mathscr{U}$。

1 基本定义

定义 1[1] A 在 X 中 1-仿紧:$A \subset X$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,有开加细 $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}$在 A 中的每一点 y 局部有限(即存在 X 中的开集 V_y,使得 $|\{B:V_y \cap B \neq \phi, B \in \mathscr{B}'\}| <$ w(X))。

定义 2[1] A 在 X 中 2-仿紧: $A \subset X$, 对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的弱开加细, $A \subset \cup \mathscr{V}$,且 $\mathscr{V}$在 A 中每一点 y 局部有限。

定义 3[9] A 在 X 中 3-仿紧: $A \subset X$, 对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 A 中的开集族 $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的弱开加细, $A = \cup \mathscr{V}$, 且 $\mathscr{V}$在 A 中每一点 y 局部有限。

定义 4[1] A 在 X 中正则:$A \subset X$,对 X 的任一闭集 B,对任意 $y \in A \cap (X \backslash B)$,都有 X 中的两个不相交的开集 U、V,使得 $y \in V, A \cap B \subset U$。若 $y \in V, B \subset U$,称 A 在 X 中超正则。

定义 5[1] A 在 X 中强正则:$A \subset X$,对 X 的任一闭集 B,对任意 $y \in X \backslash B$,都有 X 中的两个不相交的开集 U、V,使得 $y \in V, A \cap B \subset U$。

定义 6[3] A 在 X 中 0^{**}-仿紧:$A \subset X$,对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,若 $A \subset \cup \mathscr{U}$,都有弱开加细 $\mathscr{V}$(X 中的开集),使得 $\mathscr{V}$在 X 中局部有限,且 $A \subset \cup \mathscr{V}$。

定义 7[3] A 在 X 中 0^{*}-仿紧:$A \subset X$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在弱开加细 $\mathscr{V}$,使得 $A \subset \cup \mathscr{V}$,且 $\mathscr{V}$在 X 中局部有限。

定义 8[3] A 在 X 中强仿紧:$A \subset X$,对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,若 $A \subset \cup \mathscr{U}$,都有 $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的弱开加细,且 $\mathscr{V}$在 A 中局部有限,$A \subset \cup \mathscr{V}$。

定义 9 A 在 X 中 1-base-仿紧:$A \subset X$,如果存在 X 的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}'$在 A 中的每一点 y 局部有限(即存在 X 中的开集 V_y,使得 $|\{B:V_y \cap B \neq \phi, B \in \mathscr{B}'\}| < w(X)$)。

定义 10 A 在 X 中 2-base-仿紧: $A \subset X$, 如果存在 X

收稿日期:2012-09-10

基金项目:安徽省高等学校省级优秀青年人才基金项目(2010SQRL158)

作者简介:幸华雄(1990-),男,四川内江人,硕士生,主要从事拓扑学方面的研究,(E-mail)99528780@qq.com

的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $A \subset \cup \mathscr{B}'$,且 $\mathscr{B}'$在 A 中每一点 y 局部有限。

定义 11　A 在 X 中 3-base-仿紧:$A \subset X$, 如果存在 X 的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 A 中的开集族 $\mathscr{B}'$,且 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $A = \cup \mathscr{B}'$,且 $\mathscr{B}'$在 A 中每一点 y 局部有限。

定义 12　A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧:$A \subset X$, 如果存在 X 的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,若 $A \subset \cup \mathscr{U}$,都有 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}'$在 X 中局部有限,且 $A \subset \cup \mathscr{B}'$。

定义 13　A 在 X 中 0^{*}-base-仿紧:$A \subset X$, 如果存在 X 的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $A \subset \cup \mathscr{B}'$,且 $\mathscr{B}'$在 X 中局部有限。

定义 14　A 在 X 中强-base-仿紧:$A \subset X$,如果存在 X 的一组基 $\mathscr{B}$, $|\mathscr{B}| = w(X)$,对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,若 $A \subset \cup \mathscr{U}$,都有 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}'$在 A 中局部有限,且 $A \subset \cup \mathscr{B}'$。

2　主要结论及其证明

定理 1　仿紧空间 X 的任意闭子集都是在 X 中 0^{**}-base-仿紧的。

证明　设仿紧空间 X 的闭子集 A, 对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,且 $A \subset \cup \mathscr{U}$。则有:$\mathscr{U} \cup (X \backslash A)$ 是 X 的一个开覆盖。由于 X 是仿紧空间,所以可知 $\mathscr{U} \cup (X \backslash A)$ 有局部有限开加细 $\mathscr{B}'$,因此 $\mathscr{U}$ 有局部有限开加细 $\mathscr{B}_0'$,且 $\cup \mathscr{B}_0' = \cup \mathscr{U}$。故有 $A \subset \cup \mathscr{B}_0'$,因此 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧。

定理 2　正则空间的可数子集都是在该空间中强-base-仿紧的。

证明　设 X 是一正则空间, A 是 X 一可数子集。对 X 的任意开集族 $\mathscr{U}$,且 $A \subset \cup \mathscr{U}$。对任意 $x \in A$, 因为 $A \subset \cup \mathscr{U}$,所以存在 $U_x \in \mathscr{U}$, 使得 $x \in U_x$。由于 X 是正则空间,可知存在 x 的开领域 V_x,使得 $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x$。令 $\mathscr{V} = \{ V_x : x \in A\}$,则有 $A \subset \cup \mathscr{V} \subset \cup \mathscr{U}$,显然 $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的弱开加细。又 A 是 X 的可数子集,所以 $\mathscr{V}$在 A 中每点局部有限。所以, A 在 X 中强-base-仿紧。

定理 3　$A \subset X$,X 是 T_2空间,且 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧,则 A 是 X 的闭子集。

证明　对任意 $y \in X \backslash A$,由于 X 是 T_2 空间,故 y 与 A 中每点 x 可开集分离。即 $\forall x \in A$,存在 x 的开领域 V_x 与 y 的开领域 V_y,使得 $V_x \cap V_y = \phi$。又令 $\mathscr{V} = \{ V_x : x \in A \}$,则 $\mathscr{V}$是 A 的一开覆盖,由 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧可知,存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),$A \subset \cup \mathscr{B}'$,且 $\mathscr{B}'$在 X 中局部有限。对 y, 由 $\mathscr{B}'$在 X 中局部有限, $\exists O_y$, 使得 $|(\mathscr{D})_{O_y}| < w(X)$,其中 $(\mathscr{D})_{O_y} = \{V_{xi} : V_{xi} \cap V_y^i = \phi, V_{xi} \cap O_y \neq \phi\}$。令 $U_y = \cap_{i=1}^{n} V_y^i \cap O_y$ 为开集,则由上可知, $U_y \cap A = \phi$,故 A 是 X 的闭子集。

定理 4　$A \subset X$,A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧,且 X 是超正则的, 则对含 A 的任一开集 U, 有开集 V, 使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$。

证明　对任意 $x \in A$, 因为 $A \subset U$ 开,由 X 超正则可知,存在 V_x开于 X, 使得 $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x$。又 $\mathscr{V} = \{V_x : x \in A\}$是 A 的一开覆盖,因 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧,故 V 有局部有限的弱开加细 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),令 $V = \cup \mathscr{B}'$,则 $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$。

定理 5　$A \subset X$,X 是 T_2 空间,且 A 在 X 中 0^{*}-base-仿紧,则 A 在 X 中强正则。

证明　对 X 的任意闭子集 B,对 $\forall y \in X \backslash B$, $\forall x \in B$,由于 X 是 T_2 空间,故分别存在 x、y 的开领域 U_x、V_y,使得 $V_x \cap V_y = \phi$。令 $\mathscr{U}' = \{U_x : x \in B\}$, 则 $\mathscr{U} = \mathscr{U}' \cup (X \backslash B)$ 是 X 的一开覆盖,又 A 在 X 中 0^{*}-base-仿紧,故存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),$\mathscr{B}'$在 X 中局部有限且 $A \subset \cup \mathscr{B}'$。对 y,由 $\mathscr{B}'$在 X 中局部有限且 X 是 T_2 空间,存在 O_y, 使得 $|(\mathscr{V})_{O_y}| < w(X)$,其中 $(\mathscr{V})_{O_y} = \{B_{xi} : B_{xi} \in \mathscr{B}', B_{xi} \cap O_y \neq \phi, B_{xi} \cap V_y^i = \phi\}$。令 $V = \cap_{i=1}^{n} V_y^i \cap O_y$, $U = \cup \mathscr{B}'$, 则 $V \cap U = \phi$,且 $y \in V$, $A \cap B \subset U$. 故 A 在 X 中强正则。

定理 6　A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧,且 A 在 X 中强正则,则 A 在 X 中 1-base-仿紧。

证明　设 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$,由 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧可知,存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),$\mathscr{B}'$在 X 中局部有限且 $A \subset \cup \mathscr{B}'$。由定理 4 可知,存在开集 V,使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset \cup \mathscr{B}'$。令 $\mathscr{V} = \mathscr{B}' \cup \{U \backslash \overline{V} : U \in \mathscr{U}\}$,则 $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$ 的加细,且在 A 中每点局部有限。故 A 在 X 中 1-base-仿紧。

定理 7　A 是正规空间 X 的闭子集,且 A 在 X 中 2-base-仿紧,则 A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧。

证明　设 $\mathscr{U}$ 是 X 中的任一开集族,且有 $A \subset \cup \mathscr{U}$,则 $\mathscr{U} \cup (X \backslash A)$ 是 X 的一开覆盖。由 A 在 X 中 2-base-仿紧可知,存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),$\mathscr{B}'$在 A 中每点局部有限。即任意 $x \in A$, 存在 V_x开于 X, 使得 $|\{ V : V_x \cap V \neq \phi \}| < w(X)$。令 $V' = \cup \{V_x : x \in A\}$,则 $A \subset V'$,由 X 正规可知,存在开集 V_1,使得 $A \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V'$。令 $\mathscr{V}' = \{ V_1 \cap V : V \in \mathscr{B}'\}$,则 $\mathscr{V}'$在 X 中局部有限。所以, A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧。

定理 8　A 是正规空间 X 的闭子集,且 A 在 X 中

0^*-base-仿紧,则 A 在 X 中 1-base-仿紧。

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X 中的任一开覆盖,由 A 在 X 中 0^*-base-仿紧可知,存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),使得 $A \subset \cup \mathscr{B}'$。由 X 正规可知,存在开集 V,使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset \cup \mathscr{B}'$。令 $\mathscr{V} = \mathscr{B}' \cup \{U \setminus \overline{V} : U \in \mathscr{U}\}$,显然,$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细且在 A 中局部有限。故 A 在 X 中 1-base-仿紧。

定理 9 A 是空间 X 的闭子集,且 A 在 X 中 1-base-仿紧,则 A 在 X 中强-base-仿紧。

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X 中的任一开集族,且有 $A \subset \cup \mathscr{U}$,则 $\mathscr{U} \cup (X \setminus A)$ 是 X 的一开覆盖。由 A 在 X 中 1-base-仿紧可知,存在开加细 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$($\mathscr{B}$ 为 X 的一组基),$\mathscr{B}'$ 在 A 中每点局部有限。令 $\mathscr{V} = \{V' \in \mathscr{B}' : V' \cap A \neq \phi\}$,则有 $A \subset \cup \mathscr{U}$,$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的弱加细,$\mathscr{V} \subset \mathscr{B}$,$\mathscr{V}$ 在 A 中每点局部有限. 因此,A 在 X 中强-base-仿紧。证毕

定理 10 $A \subset X$,A 在正规空间 X 中 0^*-base-仿紧,则 $\overline{A}$ 是 base-仿紧空间。

证明 设是 X 中的任一开集族,且有 $\overline{A} \subset \cup \mathscr{U}$,则 $\mathscr{U} \cup (X \setminus \overline{A})$ 是 X 的一开覆盖。由 X 的正则性可知,有 X 的一组基 $\mathscr{B}$,存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}'$ 及 $\mathscr{B}'^{-} = \{\overline{B} : B \in \mathscr{B}'\}$ 是 $\mathscr{U} \cup (X \setminus \overline{A})$ 的加细,由 A 在 X 中 0^*-base-仿紧可知,$\mathscr{B}'$ 有弱加细 $\mathscr{B}_0' \subset \mathscr{B}$, $A \subset \cup \mathscr{B}_0'$,且 $\mathscr{B}_0'$ 在 X 中局部有限,故 $A \subset \cup \mathscr{B}_0' \subset (\cup \mathscr{B}_0')^{-} = \cup \{\overline{B} : B \in \mathscr{B}_0'\}$。故有 $\overline{A} = \cup \{\overline{B} \cap \overline{A} : \overline{B} \in \mathscr{B}_0'\}$ 是 $\{U \cap \overline{A} : U \in \mathscr{U}\}$ 的局部有限闭加细. 所以 $\overline{A}$ 是 base-仿紧空间。

推论 1 A 是正规空间 X 的闭子集,则下列叙述等价:

(1) A 在 X 中 0^{**}-base-仿紧。

(2) A 在 X 中 0^*-base-仿紧。

(3) A 在 X 中 1-base-仿紧。

(4) A 在 X 中强-base-仿紧。

(5) A 在 X 中 2-base-仿紧。

图 1 列出几种空间的关系,用 1-base-仿紧代表 A 在 X 中 1-base-仿紧,其它类似。

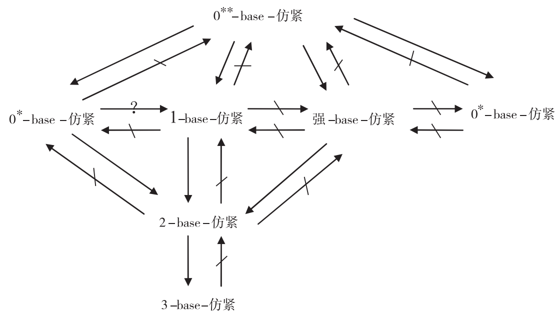

图 1　几种空间关系

参 考 文 献:

[1] John E. Porter, Base-paracpmpact spaces[J]. Topology and its Applications, 2003, 128: 145-156.

[2] 彭良雪. 几种新空间类的性质及其相互间的关系[J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 1999, 20(3): 1-4.

[3] 高国士. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[4] Engelking R, General Topology[M]. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] Arhangel A V, Genedi H M M. General Topology[M]. MGU Moscow, 1989.

[6] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[7] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲[M]. 四川: 四川教育出版社, 1991.

[8] 纪广月. 基-可数亚紧空间[J]. 广东工业大学学报, 2012, 29(1): 67-68.

[9] Arhangel'skii A V. Relative topological properties and relative topological spaces[J]. Topology and its Applications, 1996, 70: 87-99.

Property and Relationship of Several New Kinds of Topological Spaces

XING Hua-xiong, *YANG Si-xin*, *WU Zhao-xin*

(Dept. of Applied Math., Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: Based on the definition of 1-paracompact、2-paracompact、3-paracompact、0^{**}-paracompact、0^*-paracompact、strongly paracompact, the conceptions of 1-base-pa-racompact、2-base-paracompact、3-base-paracompact、0^{**}-base-paracompact、0^*-base-paracompact and strongly-base-paracompact are defined, and their property and relationship are discussed.

Key words: 1-base-paracompact; 2-base-paracompact; 3-base-paracompact; 0^{**}-base-paracompact; 0^*-base-paracompact