第 26 卷第 1 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 1
2013 年 2 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2013
文章编号:1673-1549(2013)01-0076-03　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.018

M 矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界的估计

李艳艳

(文山学院数理系, 云南　文山　663000)

摘　要:借助非奇异 M 矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的元素的一些估计式和组合优化的思想,给出非奇异 M 矩阵 B 与 A^{-1} 的 Hadamard 积 $B\circ A^{-1}$ 的最小特征值下界的一些新估计式。这些估计式比现有的仅依赖于矩阵元素的估计式更加精确。

关键词: M 矩阵; Hadamard 积; 最小特征值

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

非奇异 M 矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 与 M 矩阵 B 的 Hadamard 积 $B\circ A^{-1}$ 的最小特征值 $\tau(B\circ A^{-1})$ 的下界已有许多学者研究并且取得了诸多的估计式[1-7],但这些估计式有的涉及到矩阵的特征值或谱半径,当矩阵的阶数较大时不容易计算;有的虽然仅依赖于矩阵的元素但是估计还不是太精确。本文利用组合优化的思想继续研究该问题,给出只与矩阵元素有关的一些新的估计式,这些估计式不仅容易计算,而且比参考文献中的估计式更加精确。

1　预备知识

$C^{n\times n}$ ($R^{n\times n}$)表示 $n\times n$ 复(实)矩阵的集合,

$N=\{1,2,\cdots,n\},i,j\in N$

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|$$

$$C_i=\sum_{k\neq i}|a_{ki}|$$

$$d_i=\frac{R_i}{|a_{ii}|}$$

$$\hat{c}_i=\frac{C_i}{|a_{ii}|}$$

$$s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|},j\neq i,s_i=\max_{j\neq i}\{s_{ij}\}$$

$$s'_{ij}=\frac{|a_{ij}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{kj}|\hat{c}_k}{|a_{jj}|},j\neq i,s'_i=\max_{j\neq i}\{s'_{ji}\}$$

$$r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|},\ l\neq i,r_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\}$$

$$c_{il}=\frac{|a_{il}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{kl}|},l\neq i,c_i=\max_{l\neq i}\{c_{il}\}$$

$$m_{ki}=\frac{|a_{ki}|+\sum_{s\neq k,i}|a_{ks}|r_i}{|a_{kk}|},k\neq i$$

$$m'_{ik}=\frac{|a_{ik}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{sk}|c_i}{a_{kk}},k\neq i$$

$$v_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|m_{ki}}{a_{jj}},j\neq i,\ v_i=\max_{j\neq i}\{v_{ij}\}$$

$$v'_{ij}=\frac{|a_{ij}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|m'_{ik}}{a_{jj}},j\neq i,v'_i=\max_{j\neq i}\{v'_{ij}\}$$

定义 1[1]　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 若 $a_{ij}\leqslant 0,i\neq j$, 则称 A 为 Z 矩阵。

定义 2[1]　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 且为 Z 矩阵,若 A 能表示为 $A=\alpha I-P$, 其中 $P\geqslant 0$, $\alpha\geqslant\rho(P)$, 则称 A 为 M 矩阵。当 $\alpha>\rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 M 矩阵;当 $\alpha=\rho(P)$ 时,称 A 为奇异 M 矩阵, M_n 表示非奇异 M 矩阵的集合。

收稿日期:2012-11-21
基金项目:文山学院科研基金项目(11WSYQ01)
作者简介:李艳艳(1982-),女,甘肃庆阳人,讲师,硕士,主要从事矩阵理论及其应用方面的研究,(E-mail)liyanyan409@126.com

定义 3[1]　设 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 表示矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值组成的集合，其中 A 的最小特征值记作 $\tau(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$（$\mathrm{Re}(\lambda)$ 表示 λ 的实部），记 $q(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$，称 $q(A)$ 为 A 的最小特征值。

定义 4[1]　设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$

记 $A\circ B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn}\end{pmatrix}$，称为 A 与 B 的 Hadamard 积。

定义 5[1]　若 $Ae=e$，$A^Te=e$，$e=(1,1,\cdots,1)^T$，则称 A^{-1} 为双随机矩阵。

若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行严格对角占优矩阵且 $A^{-1}=(\beta_{ij})$，则由文献[2－4]分别知

$$|\beta_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,j\neq i \tag{1}$$

$$|\beta_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,j\neq i \tag{2}$$

$$|\beta_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|m_{ki}}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,j\neq i \tag{3}$$

若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是 M 矩阵，$A^{-1}=(\beta_{ij})$ 是双随机矩阵，则由文献[2－4]分别知

$$\frac{1}{a_{ii}}\leqslant\beta_{ii} \tag{4}$$

$$\beta_{ii}\geqslant\frac{1}{1+\sum\limits_{j\neq i}s_{ji}} \tag{5}$$

$$\beta_{ii}\geqslant\frac{1}{1+\sum\limits_{j\neq i}v_{ji}} \tag{6}$$

$$\beta_{ii}\geqslant\frac{1}{1+\sum\limits_{j\neq i}m_{ji}} \tag{7}$$

引理 1[1]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 是一组正实数。则 A 的所有特征值包含在复平面 C 的如下区域中：$\cup\{z\in C:|z-a_{ii}|\leqslant x_i\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{x_j}|a_{ji}|,i\in N\}$。

引理 2[1]　若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是 M 矩阵，则存在正对角矩阵 D，使 $D^{-1}AD$ 是严格对角占优矩阵也是 M 矩阵。

引理 3[1]　设 $A,B,C,D\in R^{n\times n}$，其中 D,E 为对角矩阵。则

$$D(A\circ B)E=(DAE)\circ B=(DA)\circ BE=(AE)\circ(DB)=A\circ(DBE)$$

2　主要结果

定理 1　设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})\in M_n$，且 $A^{-1}=(\beta_{ij})$。则

$$\tau(B\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|m_{ji}}{a_{ii}}\right\} \tag{8}$$

证明　因为 A 是 M 矩阵，应用引理 2 与引理 3 知，存在正对角矩阵 D 且有 $\tau(B\circ A^{-1})=\tau(D^{-1}(B\circ A^{-1})D)=\tau(B\circ(D^{-1}AD)^{-1})$，所以设 A 是严格对角占优矩阵，有可约与不可约两种情况。

若 A,B 不可约，令 $R_j^d=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|d_k,j\in N$，则

$$R_j^d\leqslant|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k\leqslant R_j=\sum_{k\neq j}|a_{jk}|$$

则存在实数 $\alpha_{ji}(0\leqslant\alpha_{ji}\leqslant 1)$ 且

$$|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k=\alpha_{ji}R_j+(1-\alpha_{ji})R_j^d$$

令 $\alpha_j=\max\limits_{i\neq j}\{\alpha_{ji}\}$，$0<\alpha_j\leqslant 1$（若 $\alpha_j=0$，则 A 是可约矩阵，这与假设矛盾），

$$s_j=\max_{i\neq j}\{s_{ji}\}=\frac{\alpha_jR_j+(1-\alpha_j)R_j^d}{a_{jj}},j\in N$$

易知，$0<s_j\leqslant 1$。设 $\lambda=\tau(B\circ A^{-1})$，由引理 1 知，存在 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant n)$，使得

$$|\lambda-b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}|\leqslant s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|b_{ji_0}\beta_{ji_0}|$$

$$|\lambda|\geqslant b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|b_{ji_0}\beta_{ji_0}|\geqslant$$

$$a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|b_{ji_0}|\frac{|a_{ji_0}|+\sum\limits_{k\neq j,i_0}|a_{jk}|r_i}{a_{jj}}\beta_{i_0i_0}=$$

$$\left(b_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|b_{ji_0}|m_{ji_0}\right)\beta_{i_0i_0}\geqslant$$

$$\left\{\frac{a_{i_0i_0}-s_{i_0}\sum\limits_{j\neq i_0}\frac{1}{s_j}|b_{ji_0}|m_{ji_0}}{a_{i_0i_0}}\right\}\geqslant$$

$$\min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum\limits_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|m_{ji}}{a_{ii}}\right\}$$

当 A,B 有一个可约时，类似文献[5]的证明知此时定理 1 也成立。

应用定理 1 与式(5)，式(6)，式(7)分别可得

$$\tau(B\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|m_{ji}}{1+\sum_{j\neq i}s_{ji}}\right\} \tag{9}$$

$$\tau(B\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|m_{ji}}{1+\sum_{j\neq i}m_{ji}}\right\} \tag{10}$$

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|m_{ji}}{1+\sum_{j\neq i}v_{ji}}\right\} \qquad (11)$$

类似定理 1 利用组合优化的思想通过对 x 的不同选取得

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{s_j}|b_{ji}|v_{ji}}{a_{ii}}\right\} \qquad (12)$$

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-v_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{v_j}|b_{ji}|s_{ji}}{a_{ii}}\right\} \qquad (13)$$

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-v_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{v_j}|b_{ji}|m_{ji}}{a_{ii}}\right\} \qquad (14)$$

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-m_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{m_j}|b_{ji}|s_{ji}}{a_{ii}}\right\} \qquad (15)$$

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{b_{ii}-m_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{m_j}|b_{ji}|v_{ji}}{a_{ii}}\right\} \qquad (16)$$

类似定理 1 的推论也可得相似的推论。

3 V 数值算例

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & -1\\ -2 & 5 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.5 & 1\end{pmatrix}$$

应用(8)式,(12)式,(13)式,(14)式,(15)式,(16)式分别得

$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.068$$
$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.1049$$
$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.068$$
$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.1118$$
$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.0598$$
$$\tau(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.1953$$

而事实上 $\tau(B\circ A^{-1})=0.2266$。这些结果比文献[3,5]中的相应结果更精确。并且本文所得的估计式只依赖于矩阵的元素易于计算,也就要比文献[6,7]中的相应结果应用更加广泛。

参 考 文 献:

[1] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[2] 高美平. M 矩阵与其逆的 Hadamard 积的最小特征值下界新的估计式[D].昆明:云南大学,2009.

[3] Li Yaotang,Li Yanyan.Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl,2010,432:536-545.

[4] Varga R S. Minimal Gerschgorin sets[J]. Pacific J. Math,1965,15(2):719-729.

[5] 李艳艳,李耀堂.矩阵 Hadamard 积和 Fan 积的特征值界的估计[J].云南大学学报:自然科学版,2010,32(2):125-129.

[6] 蒋建新,李艳艳. M 矩阵的 Hadamard 积的最小特征值下界估计[J].四川理工学院学报:自然科学版,2011,24(1):48-50.

[7] 杨晓英,刘 新.M 矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值的新下界[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(2):84-87.

Estimation of the Lower Bound of Minimum Eigenvalue for *M* Matrix of Hadamard Product

LI Yan-yan

(Department of Mathematics and Physics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract: Based on some estimation and optimization idea of nonsingular M matrix A's inverse matrix A^{-1}'s elements, the new estimator of minimum eigenvalue bounds of the nonsingular M matrix B and A^{-1} the Hadamard product $B\circ A^{-1}$ is given of. These estimates is more accurate compared with the existing one that depends on the matrix elements of the estimator.

Key words: M matrix; Hadamard Product; minimum eigenvalue