第 26 卷第 1 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 1
2013 年 2 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2013
文章编号:1673-1549(2013)01-0082-05　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.020

一类非扩张映射可数族公共不动点的带误差项的修正 Ishikawa 迭代算法

马剑鹏, 何中全

(西华师范大学数学与信息学院, 四川　南充　637000)

摘　要:在 Hilbert 空间中,研究了可数族逐点渐进非扩张映射的公共不动点,利用单调混合迭代方法给出一个新的带误差项的 Ishikawa 迭代算法,并在适当条件下证明了此迭代序列强收敛于这族逐点渐进非扩张映射的公共不动点。这些结果改进和推广了这类问题的一些最新研究结果。

关键词:逐点渐近非扩张;无限可数族;公共不动点;投影算子

中图分类号:O177.91　　**文献标志码**:A

引　言

1953 年,Mann W R[1] 介绍了一种迭代方法逼近非扩张映射的不动点,即著名的 Mann 迭代算法: $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n$, 其中 $\forall x_0 \in C, 0 < \alpha_n < 1$。

许多研究者[1-3] 在 Hilbert 空间和 Banach 空间中研究了 Mann 迭代方式的不动点用于解决非线性算子以及变分不等式。

为了适宜渐进非扩张映射 T, 提出修正 Mann 迭代[4-5]:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T^n x_n, x_0 \in C, \{\alpha_n\} \subset [0,1]$$

2008 年 Inchan[6] 在 Hilbert 空间中引入了一种新的非扩张映射的 Mann 混合型迭代算法:

$$\begin{cases} C_1 = C, x_1 = P_{C_1}(x_0) \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T^n x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\|^2 \leqslant \|y_n - z\|^2 + \theta_n\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), n \geqslant 0 \end{cases}$$

这里 $\operatorname{diam} C < \infty, \theta_n = (1-\beta_n)(k_n^2 - 1)(\operatorname{diam} C)^2$ 且 $\theta_n \to 0, (n \to \infty)$, 证明了满足 $0 < \beta_n < 1$, 此迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_{F(T)}(x_0)$。

1974 年, Ishikawa[7] 推广了 Mann 迭代算法, 提出 Ishikawa 迭代算法:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Ty_n \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n \end{cases}$$

其中 $\forall x_0 \in C, 0 \leqslant \alpha_n, \beta_n \leqslant 1, n \geqslant 0$。

为了适宜渐进非扩张映射 T, 提出修正 Ishikawa 迭代[8]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T^n y_n \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T^n x_n \end{cases}$$

其中 $\forall x_0 \in C$, 数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$。

2008 年, Kirk 和 Xun[9], 首次引入了一类更广泛的渐进非扩张映射即逐点渐进非扩张映射, 并研究了这类映射在一致凸 Banach 空间的公共不动点

2011 年, Balooee J [10] 研究了一个无限可数族逐点渐进非扩张映射的公共不动点的强收敛性。

受文献[1-10]启发, 本文在 Hilbert 空间中构造了可数族逐点渐进非扩张映射的公共不动点的带误差项迭代算法, 在适当条件下, 证明了该迭代序列强收敛于此族渐进非扩张映射的公共不动点, 改进了 Chen[11] 和 Balooee J[10] 等人的研究结果。

收稿日期:2012-11-19

基金项目:四川省教育厅项目((2008)359-20)

作者简介:马剑鹏(1986-),男,四川乐至人,硕士生,主要从事非线性分析及其应用方面的研究,(E-mail)majianpeng1234@sina.com

1　预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是一个映射，设 $F(T)=\{x\in C, T(x)=x\}$ 为 $T:C\to C$ 的不动点集。$\|\cdot\|$ 表示上范数，$<\cdot,\cdot>$ 表示上内积，记 $d_c(\cdot)$ 为 C 上通常距离函数，$d_c(u)=\inf_{v\in C}\|u-v\|$。设 $u\notin C$，点 $v\in C$ 是 u 到 C 的最近点或者投影点，如果有 $d_c(u)=\|u-v\|$，即 $v=P_Cu$ 当且仅当 $\|u-P_Cu\|\leqslant\|u-w\|,\forall w\in C$。根据定义知投影点是唯一的，且投影映射是非扩张映射，其中 N 表示正整数集合，当 $a,b\geqslant 0$ 有

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a+b \tag{1}$$

定义 1　设 $T:C\to C$ 是一个映射，称 T 是非扩张的，如果

$$\|T(x)-T(y)\|\leqslant\|x-y\|,\forall x,y\in C$$

称 T 是渐进非扩张的[12]，如果存在数列 $\{k_n\}\subset[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$，使得：

$$\|T^n(x)-T^n(y)\|\leqslant(1+k_n)\|x-y\|,\forall x,y\in C$$

称 T 是一致 L - Lipschitzian，如果存在常数 $L>0$，使得：

$$\|T^n(x)-T^n(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\forall x,y\in C,n\geqslant 1$$

称 T 是逐点渐进非扩张的[9]，如果存在序列 $\{a_n\}\subset[1,+\infty)$ 且 $a_n\to 1,(n\to\infty)$，都有

$$\|T^n(x)-T^n(y)\|\leqslant a_n(x)\|x-y\|,\forall x,y\in C$$

显然，渐进非扩张映射是逐点渐进非扩张映射，当 C 有界时，逐点渐进非扩张映射是渐进非扩张映射非扩张型[13]。

引理 1[14]　设 C 是实 Hilbert 空间 H 的一非空闭凸子集，则对所有 $x\in H$ 和 $y\in C$ 有

(a) $<z-P_Cx,P_Cx-x>\ \geqslant 0,\forall z\in C$

(b) $<z-y,y-x>\geqslant 0,\forall z\in C$，则 $y=P_C(x)$

引理 2[15]　设 H 是实 Hilbert 空间，对每一个 $x,y\in C$ 和每一个 $t\in[0,1]$ 都有：

(a) $\|x-y\|^2=\|x\|^2-2<x,y>+\|y\|^2$

(b) $\|tx+(1-t)y\|^2=t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2-t(1-t)\|x-y\|^2$

(c) 若 H 中的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 z，则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|^2=\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-z\|^2+\|z-y\|^2$

引理 3　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 非空闭凸子集，P_C 为 H 到 C 度量投影，给定 $x\in H$ 和 $z\in C$，则 $z=P_C(x)$ 当且仅当对任意 $y\in C$ 时，有 $<x-z,y-z>\leqslant 0$。

引理 4　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 非空闭凸子集，H 中的序列 $\{x_n\}$，令 $u\in H$ 和 $q=P_C(u)$，如果 $\{x_n\}$ 满足 $\omega_w\{x_n\}\subseteq C$，并且 $\|x_n-u\|\leqslant\|u-q\|$，对于 $n\geqslant 1$，则 $x_n\to q$，其中 $\omega_w\{x_n\}=\{x:\exists x_{n_j}\xrightarrow{\omega}x\}$ 表示弱极限。

引理 5[16]　设 H 是实的 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$P_C:H\to C$ 的度量投影，则 $\|y-P_C(x)\|^2+\|x-P_C(x)\|^2\leqslant\|x-y\|^2$

命题 1[10]　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是一个一致 L - Lipschitzian 和存在非负序列 $\{\alpha_n\}\subset[1,+\infty)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$ 的逐点渐进扩张映射，则 $I-T$ 半闭为零，即若 C 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\xrightarrow{\omega}q$ 和 $\lim\limits_{m\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n-T^mx_n\|=0$，则 $(I-T)q=0$。

命题 2[10]　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是一个一致 L - Lipschitzian 和存在非负序列 $\{\alpha_n\}\subset[1,+\infty)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$ 的逐点渐进扩张映射，则 T 的不动点集 $Fix(T)$ 是闭凸的。

2　主要结论

定理 1　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 一个非空闭凸子集，$T_i:C\to C$ 是一致 L_i - Lipschitzian 的和存在序列 $\{a_{i,n}\}\subset[1,+\infty)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{i,n}=1,(i\in N)$ 的逐点渐进扩张映射，存在 $\{\beta_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\gamma_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta'_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\gamma'_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ 都是 $[0,1]$ 中的 4 个序列，且 $\{u_{i,n}\}$，$\{v_{i,n}\}$ 是有界序列，若满足 $\beta_{i,n},\beta'_{i,n}\in(0,1)$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_{i,n}<\infty$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma'_{i,n}<\infty$，给定的初始点 $\forall x_0\in C$，再令 $F:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}Fix(T_i)\neq\Phi$，定义序列 $\{x_n\}$ 如下形式：

$$\begin{cases} C_{i,1}=C,C_1=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{i,1},x_1=P_{C_1}(x_0) \\ y_{i,n}=(1-\beta_{i,n}-\gamma_{i,n})x_n+\beta_{i,n}T_i^nz_{i,n}+\gamma_{i,n}u_{i,n} \\ z_{i,n}=(1-\beta'_{i,n}-\gamma'_{i,n})x_n+\beta'_{i,n}T_i^nx_n+\gamma'_{i,n}v_{i,n} \\ C_{i,n+1}=\{z\in C_{i,n}:\|y_{i,n}-z\|^2\leqslant\|x_n-z\|^2+\theta_{i,n}\} \\ C_{n+1}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{i,n+1} \\ x_{n+1}=P_{C_{n+1}}(x_0) \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\theta_{i,n}=\beta_{i,n}(a_{i,n}^2(p)(\beta'_{i,n}a_{i,n}^2(p)+1-\beta'_{i,n})-1)M^2+\beta_{i,n}a_{i,n}^2(p)\gamma'_{i,n}M_{i,2}+\gamma_{i,n}M_{i,1}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_{i,n}=0,M=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{\|x_n-p\|:p\in F\}<\infty$，

$$2\beta_{i,n}\|T_i^nz_{i,n}-p\|\|u_{i,n}-x_n\|+\gamma_{i,n}\|u_{i,n}-x_n\|^2+$$

$$2(1-\beta_{i,n})\|x_n-p\|\|u_{i,n}-x_n\|\leqslant M_{i,1}$$

$$2(\beta'_{i,n}a_{i,n}(p)+(1-\beta'_{i,n}))\|x_n-p\|\|v_{i,n}-x_n\|+\gamma'_{i,n}\|v_{i,n}-x_n\|^2\leqslant M_{i,2}$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_F(x_0)$。

证明 根据命题2 知,$\mathrm{Fix}(T_i),(i\in N)$ 是 C 非空闭凸子集,则 F 是 C 非空闭凸子集。为证明 $C_{n+1},n\geqslant 1$ 是闭凸集,而只需证明 $C_{i,n}$ 是闭凸集。

采取对每一个 $i\in N$ 所对应的 n 进行归纳。当 $n=1,C_{i,1}=C$ 是闭凸集,假设 $C_{i,n},n\geqslant 1$ 也是闭凸集,则再根据 $C_{i,n+1},n\geqslant 1$ 的定义和引理3 可得 $C_{i,n+1},n\geqslant 1$ 是闭凸集,综上 $C_{i,n}$ 是闭凸集,则 C_n 是闭凸集。

事实上,由 $x_{n+1}=P_{C_{n+1}}(x_0),x_{n+1}\in C_n$,投影映射的唯一性,$P_F(x_0)\in F\subset C_n$ 以及 C_n 的凸性知:

$$\|x_{n+1}-x_0\|\leqslant\|P_F(x_0)-x_0\| \tag{3}$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$ 存在,即序列 $\{x_n\}$ 是有界的,再由 $\{u_{i,n}\},\{v_{i,n}\}$ 是 C 中有界序列和 $\forall p\in F$,则

$$\max\{\sup_{n\geqslant 1}\|u_{i,n}-p\|,\sup_{n\geqslant 1}\|v_{i,n}-p\|:p\in F\}<\infty$$

又由 $\|u_{i,n}-x_n\|\leqslant\|u_{i,n}-p\|+\|x_n-p\|$,则 $\|u_{i,n}-x_n\|$ 是有界的,同理 $\|v_{i,n}-x_n\|$ 也是有界的,因为 $F:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)\neq\Phi$,则 $\|T_i^nz_{i,n}-p\|$ 有界。再由(2)式和引理 2(b),$\forall p\in F,i\in N,n\geqslant 1$ 和 $M=\sup\limits_{n\in N}\{\|x_n-p\|:p\in F\}<\infty$ 有:

$$\begin{aligned}\|y_{i,n}-p\|^2&=\|\alpha_{i,n}x_n+\beta_{i,n}T_i^nz_{i,n}+\gamma_{i,n}u_{i,n}-p\|^2=\\&|\beta_{i,n}(T_i^nz_{i,n}-p+\gamma_{i,n}(u_{i,n}-x_n))+\\&(1-\beta_{i,n})(x_n-p+\gamma_{i,n}(u_{i,n}-x_n))|^2=\\&\beta_{i,n}\|T_i^nz_{i,n}-p+\gamma_{i,n}(u_{i,n}-x_n)\|^2+\\&(1-\beta_{i,n})\|(x_n-p+\gamma_{i,n}(u_{i,n}-x_n))\|^2-\\&(1-\beta_{i,n})\beta_{i,n}\|T_i^nz_{i,n}-x_n\|^2\leqslant\\&\beta_{i,n}\|T_i^nz_{i,n}-p\|^2+(1-\beta_{i,n})\|x_n-p\|^2-\\&(1-\beta_{i,n})\beta_{i,n}\|T_i^nx_n-x_n\|^2+\\&2\beta_{i,n}\gamma_{i,n}\|T_i^nz_{i,n}-p\|\|u_{i,n}-x_n\|+\\&\gamma_{i,n}^2\|u_{i,n}-x_n\|^2+\\&2(1-\beta_{i,n})\gamma_{i,n}\|x_n-p\|\|u_{i,n}-x_n\|\leqslant\\&\beta_{i,n}a_{i,n}^2(p)\|z_{i,n}-p\|^2+\\&(1-\beta_{i,n})\|x_n-p\|^2+\gamma_{i,n}M_{i,1}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\|z_{i,n}-p\|^2&=\|\alpha'_{i,n}x_n+\beta'_{i,n}T_i^nx_n+\gamma'_{i,n}v_{i,n}-p\|^2=\\&\beta'_{i,n}\|(T_i^nx_n-p+\gamma'_{i,n}(v_{i,n}-x_n))\|^2+\\&(1-\beta'_{i,n})\|(x_n-p+\gamma'_{i,n}(v_{i,n}-x_n))\|^2-\\&(1-\beta'_{i,n})\beta'_{i,n}\|T_i^nx_n-x_n\|^2\leqslant\\&\beta'_{i,n}a_{i,n}^2(p)\|x_n-p\|^2+\\&(1-\beta'_{i,n})\|x_n-p\|^2+\\&2\beta'_{i,n}\gamma'_{i,n}a_{i,n}(p)\|x_n-p\|\|v_{i,n}-x_n\|+\\&2(1-\beta'_{i,n})\gamma'_{i,n}\|x_n-p\|\|v_{i,n}-x_n\|+\\&\gamma'^2_{i,n}\|v_{i,n}-x_n\|^2\leqslant\\&(\beta'_{i,n}a_{i,n}^2(p)+(1-\beta'_{i,n}))\|x_n-p\|^2+\\&\gamma'_{i,n}M_{i,2}\end{aligned} \tag{5}$$

结合(4)式和(5)式得:

$$\begin{aligned}\|y_{i,n}-p\|^2&\leqslant\beta_{i,n}a_{i,n}^2(p)\|z_{i,n}-p\|^2+\\&(1-\beta_{i,n})\|x_n-p\|^2+\gamma_{i,n}M_{i,1}=\\&\|x_n-p\|^2+\\&\beta_{i,n}\beta'_{i,n}a_{i,n}^4(p)\|x_n-p\|^2+\\&\beta_{i,n}(a_{i,n}^2(p)(1-\beta'_{i,n})-1)\|x_n-p\|^2+\\&\beta_{i,n}a_{i,n}^2(p)\gamma'_{i,n}M_{i,2}+\gamma_{i,n}M_{i,1}\end{aligned}$$

则

$$\|y_{i,n}-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2+\theta_{i,n} \tag{6}$$

那么 $p\in C_{i,n}(i\in N,n\geqslant 1)$,即证明 $F\subseteq C_n$。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$ 存在,假设 $m>n$,则 $x_m=P_{C_m}(x_0)\in C_m\subset C_n$,再由 C_n 的凸性和 $x_n=P_{C_n}(x_0)$ 以及引理1 知:$<x_m-x_n,x_n-x_0>\geqslant 0$,那么,

$$\begin{aligned}\|x_m-x_n\|^2&=\|x_m-x_0\|^2+\|x_n-x_0\|^2-\\&2<x_m-x_n,x_n-x_0>\leqslant\\&\|x_m-x_0\|^2+\\&\|x_n-x_0\|^2\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$ 成立,即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$。

根据 $x_{n+1}\in C_{i,n}$ 以及序列 $\{x_n\}$ 的定义知

$$\begin{aligned}\beta_{i,n}^2\|T_i^nz_{i,n}-x_n\|^2&=\|y_{i,n}-x_n+\gamma_{i,n}(x_n-u_{i,n})\|^2\leqslant\\&(\|y_{i,n}-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|+\\&\gamma_{i,n}\|x_n-u_{i,n}\|)^2=\\&\|y_{i,n}-x_{n+1}\|^2+\|x_{n+1}-x_n\|^2+\\&2\|y_{i,n}-x_{n+1}\|\|x_{n+1}-x_n\|+\\&\gamma_{i,n}^2\|x_n-u_{i,n}\|^2+\\&2\gamma_{i,n}\|x_n-u_{i,n}\|(\|y_{i,n}-x_{n+1}\|+\\&\|x_{n+1}-x_n\|)\leqslant\\&\|y_{i,n}-x_{n+1}\|^2+\theta_{i,n}+\|x_{n+1}-x_n\|^2+\\&2\|y_{i,n}-x_{n+1}\|\|x_{n+1}-x_n\|+\\&\gamma_{i,n}^2\|x_n-u_{i,n}\|^2+\\&2\gamma_{i,n}\|x_n-u_{i,n}\|\{\|x_{n+1}-x_n\|+\\&(\|x_n-x_{n+1}\|^2+\theta_{i,n})^{\frac{1}{2}}\}\end{aligned} \tag{7}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_{i,n}=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_{i,n}<\infty,\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_{i,n}<1$,(7)式

和 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x_{n+1}\| = 0$ 知：$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_i^n z_{i,n} - x_n\|^2 = 0$。

由于 $\{x_n\}$ 是有界的，设序列 $\{x_{n_j}\}$ 是序列 $\{x_n\}$ 的子序列，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|x_{n_j} - p\| = \limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\|$，再由 $\forall j \geq 1, p \in F$，

$$\|x_{n_j} - p\| \leq \|x_{n_j} - T_i^{n_j} z_{i,n_j}\| + \|T_i^{n_j} z_{i,n_j} - p\| =$$
$$\|x_{n_j} - T_i^{n_j} z_{i,n_j}\| + a_{i,n}(p)\|z_{i,n_j} - p\|$$

则 $\liminf\limits_{j\to\infty}\|x_{n_j} - p\| \leq \liminf\limits_{j\to\infty}\|z_{i,n_j} - p\|$，再由式(1)和式(5)知：

$$\|z_{i,n_j} - p\| \leq (\beta'_{i,n_j} a_{i,n_j}^2(p) +$$
$$(1 - \beta'_{i,n_j}))^{\frac{1}{2}}\|x_{n_j} - p\| + (\gamma'_{i,n_j} M_{i,2})^{\frac{1}{2}}$$

则：$\limsup\limits_{j\leftarrow\infty}\|z_{i,n_j} - p\| \leq \limsup\limits_{j\leftarrow\infty}\|x_{n_j} - p\|$。

综上得：$\lim\limits_{j\leftarrow\infty}\|z_{i,n_j} - p\| = \lim\limits_{j\leftarrow\infty}\|x_{n_j} - p\|$，再由式(5)可知：

$$(1 - \beta'_{i,n})\beta'_{i,n}\|T_i^n x_n - x_n\|^2 \leq$$
$$\beta'_{i,n} a_{i,n}^2(p)\|x_n - p\|^2 +$$
$$(1 - \beta'_{i,n})\|x_n - p\|^2 +$$
$$\gamma'_{i,n} M_{i,2} - \|z_{i,n} - p\|^2$$

根据 $\beta'_{i,n} \in [\delta, 1 - \delta], \delta \in (0,1)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma'_{i,n} < \infty$ 知：

$$\lim_{n\to\infty}\|T_i^n x_n - x_n\| = 0 \qquad (8)$$

所以，

$$\|T_i x_n - x_n\| \leq \|T_i x_n - T_i^{n+1} x_n\| +$$
$$\|T_i^{n+1} x_n - T_i^{n+1} x_{n+1}\| +$$
$$\|T_i^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$$
$$L_i\|T_i x_n - T_i^{n+1} x_n\| + L_i\|x_n - x_{n+1}\| +$$
$$\|T_i^{n+1} x_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$

根据式(8)和 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0$ 知：

$$\lim_{n\to\infty}\|T_i x_n - x_n\| = 0 \qquad (9)$$

根据式(9)、命题 1 和 $\{x_n\}$ 是有界性知：$\Phi \neq \omega_w\{x_n\} \subset F$，由式(3)以及引理 4 知：$x_n \to P_F(x_0)$。证明完毕。

推论 1　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 Hilbert 空间 H 的一个非空闭凸子集，$T_i: C \to C$ 是一致 L_i − Lipschitzian 的和存在序列 $\{a_{i,n}\} \subset [1, +\infty)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i,n} = 1, (i \in N)$ 的逐点渐进扩张映射，存在 $\{\beta_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta'_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ 都是 $[0,1]$ 中的 2 个序列，若满足 $\beta_{i,n}, \beta'_{i,n} \in (0,1)$，任意给定的初始点 $x_0 \in C$，再令 $F := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Fix(T_i) \neq \Phi$，定义序列 $\{x_n\}$ 如下形式：

$$\begin{cases} C_{i,1} = C, C_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{i,1}, x_1 = P_{C_1}(x_0) \\ y_{i,n} = (1 - \beta_{i,n})x_n + \beta_{i,n} T_i^n z_{i,n} \\ z_{i,n} = (1 - \beta'_{i,n})x_n + \beta'_{i,n} T_i^n x_n \\ C_{i,n+1} = \{z \in C_{i,n} : \|y_{i,n} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \theta_{i,n}\} \\ C_{n+1} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_{i,n+1} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0) \end{cases}$$

其中 $\theta_{i,n} = (\beta_{i,n}(a_{i,n}^4(p) - 1))M^2$，且 $M = \sup\limits_{n\in N}\{\|x_n - p\| : p \in F\} < \infty$，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_F(x_0)$。

证明　在定理 1 的带误差项的修正 Ishikawa 迭代算法的序列 $\{x_n\}$ 中取 $\gamma_{i,n} = \gamma'_{i,n} = 0$，证明方法同定理 1。

参 考 文 献：

[1] Mann W R.Mean value methods in iteration[J].Proc.Am.Math.Soc.,1953,4(6):506-510.

[2] Opial Z.Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings[J].Bull Am.Math.Soc.,1967,73(4):591-597.

[3] Schu J.Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings[J].Bull.Austral.Math.Soc.,1991(43):153-159.

[4] Cholamjiak W,Suantai S.Convergence theorems from monotone hybrid methods for an infinitely countable family of Lipschitz asymptotically quasinonexpansive mappings[J].Nonlinear Anal: Hybrid Syst,2010,4(3):524-530.

[5] Kim,Xu H K.Strong convergence of modified Mann iterations for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups[J].Nonlinear Anal,2006,64(5):1140-1152.

[6] Inchan I. Strong convergence theorems of modified Mann iteration methods for asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J]. Int. J. Math. Anal, 2008,2(23):1135-1145.

[7] Ishikawa S.Fixed points by a new iteration method[J].Proc.Am.Math.Soc.,1974,44(1):147-150.

[8] Zeng lu chuan.Modified Ishikawa iteration process for asymptotically nonexpansive mappings[J].Math.Appl.,2003,16(2):28-31.

[9] Kirk W A,Xu H K.Asymptotic pointwise contractions [J].Nonlinear Analysis: 2008(69):4706-4712.

[10] Balooee J.Weak and strong convergence theorems of modified Ishikawa iteration for an infinitely countable family of pointwise asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J].Arab Journal of Math-

ematical Sciences,2011,17(2):153-169.

[11] Chen weixu,Guo weiping.Convergence theorems for two finite families of asymptotically nonexpansive mappings[J].Mathematical and Computer Modelling, 2011,54(5):1311-1319.

[12] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1972,35 (1):171-174.

[13] Kirk W A.Fixed point theorems for nonLipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type [J]. Israel J.Math.,1974,17(4):339-346.

[14] Zhang S S,Lee H W,Chan C K.Approximation of the nearest common fixed point of nonexpansive mappings in Hilbert Spaces [J]. Acta Mathematical Sinica,English Series,2007,23(10):1889-1896.

[15] Marino C,Xu H K.Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces[J].Math.Anal.Appl.,2007,329:336-346.

[16] Nakajo K,Takahashi W.Strongly convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 279:372-379.

[17] Somyot P,Kasamsuk U.Strong convergence of modified Ishikawa iteration for two asymptotically nonexpansive mappings and semi-groups [J]. Nonlinear Analysis,2007,67:2306-2315.

Modified Ishikawa Iteration Algorithm with Errors of Common Fixed Points for a Class Countable Family of Nonexpansive Mappings

MA Jian-peng, *HE Zhong-quan*

(School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: The common fixed points for the countable family of pointwise asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert space are studied. A new modified Ishikawa iteration algorithm with errors is presented by the monotone hybrid iterative method. It is proved that the sequence generated by the algorithm converges strongly to the common fixed points under some conditions. This result improves and extends the results of the latest research of this kind of problem.

Key words: pointwise asymptotically nonexpansive mapping; an infinitely countable family; common fixed point; projection operator