第26卷第1期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 26 No. 1
2013年2月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2013
文章编号:1673-1549(2013)01-0079-03　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.019

非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界

刘　新，杨晓英

（四川信息职业技术学院基础教育部，四川　广元　628017）

摘　要:设矩阵 A 与 B 是非负矩阵,给出 A 与 B 的 Hadamard 积 $A \circ B$ 谱半径 $\rho(A \circ B)$ 上界的新估计式。新估计式只与矩阵的元素有关,易于计算。理论分析和数值算例也说明所得估计式改进了现有的一些结果。

关键词:非负矩阵;Hadamard 积;谱半径;上界

中图分类号:O151.21　　　　**文献标志码**:A

引　言

非负矩阵理论研究已成为数学的一个重要分支,在经济学、概率统计、最优控制和工程学上有着广泛的应用,是解决现代科技生产中重大问题的重要工具之一。矩阵的 Hadamard 积是一种特殊的矩阵乘积,常出现在诸如偏微分方程中的弱极小原理、组合论中的结合方案等领域。其中关于非负矩阵的 Hadamard 积谱半径上界的估计,近年来受到了国内外许多学者的广泛关注和研究,得到了一系列估计式[1-7]。

N 表示集合 $\{1,2,\cdots,n\}$,$R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵,$C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵,$\rho(P)$ 表示 $n\times n$ 阶非负矩阵 P 的谱半径。

定义1[1]　设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,如果 $a_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 A 为非负矩阵,记为 $A\geqslant 0$;若 $a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 A 为正矩阵,记为 $A>0$。

定义2[1]　设 $A\in C^{n\times n}$,当 $n\geqslant 2$ 时,若存在 $n\times n$ 阶置换矩阵 P,使得

$$P^TAP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中 A_{11} 是 $r\times r$ 阶子矩阵,A_{22} 是 $(n-r)\times(n-r)$ 阶子矩阵($1\leqslant r<n$),则称矩阵 A 为可约矩阵。若没有置换矩阵 P 存在,则称矩阵 A 为不可约矩阵。

定义3[2]　设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,$B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$,用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵,即 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in C^{m\times n}$。则 $A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积。

若 A 为非负矩阵,则由 Perron-Frobenius 定理可知,$\rho(A)\in\sigma(A)$(其中 $\sigma(A)$ 是矩阵 A 的谱)[2]。

在文献[1]中首先给出了 $A\circ B$ 的谱半径上界的估计式:$\rho(A\circ B)\leqslant\rho(A)\rho(B)$。2007年,Fang 在文献[3]给出了:

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(A)\rho(B)-a_{ii}\rho(B)-b_{ii}\rho(A)\}$$

2008年,Huang[4]给出上界估计式:

$$\rho(A\circ B)\leqslant(1+\rho(J'_A)\rho(J'_B))\max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii})$$

2009年,Liu 等在文献[5]中得出

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(\rho(A)-a_{ii})(\rho(B)-b_{ii})(\rho(A)-a_{jj})(\rho(B)-b_{jj})]^{\frac{1}{2}}\}$$

2010年,Li 等在文献[6]中给出 $\rho(A\circ B)$ 一个只依赖于矩阵元素的估计式:

收稿日期:2012-12-09

基金项目:广元市科学技术和知识产权局科技计划项目(GYST20122733)

作者简介:刘新(1983-),男,山东济宁人,助教,硕士,主要从事矩阵理论方面的研究,(E-mail)liuxin01668@163.com

$$\rho(A\circ B) \leqslant \max_i\left\{a_{ii}b_{ii} + m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}$$

2010 年,刘新等在文献[7]中又给出一个新估计式:

$$\rho(A\circ B) \leqslant \max_i\left\{a_{ii}b_{ii} + s_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}$$

本文给出了非负矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积谱半径 $\rho(A\circ B)$ 上界的新估计式,新估计式在理论上改进了文献[7]中的结果,同时,通过算例分析说明新估计式也改进了现有的结果。

1 非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计

首先,给出一些记号,它们会在后面的讨论中用到。记:

$$c_{il} = \frac{|a_{il}|}{|a_{ll}| - \sum_{k\neq l,i}|a_{kl}|}, l \neq i$$

$$c_i = \max_{l\neq i}\{c_{il}\}, i \in N$$

$$s_{ji} = |a_{ji}|h_j, h_j = \begin{cases} c_j, & c_j \neq 0 \\ 1, & c_j = 0\end{cases}$$

$$s_i = \max_{j\neq i}\{s_{ji}\}, i,j \in N$$

引理 1[1] 设 $A,B \in R^{n\times n}$,$D \in R^{n\times n}$ 与 $E \in R^{n\times n}$ 都是对角矩阵,则

$$D(A\circ B)E = (DAE)\circ B = (DA)\circ(BE) = (AE)\circ(DB) = A\circ(DBE)$$

引理 2[8] 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是任意复矩阵,则 A 的所有特征值都位于下列区域之中

$$\bigcup_{i,j=1 i\neq j}^{n}\{z \in C: |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leqslant \sum_{k\neq i}|a_{ki}|\sum_{k\neq j}|a_{kj}|\}$$

定理 1 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,$B \in R^{n\times n}$ 是非负矩阵,则

$$\rho(A\circ B) \leqslant \max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k} \tag{1}$$

证明 若 $A\circ B$ 不可约,则 A,B 不可约。令 $S = diag(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 且 $S > 0$,而且 $\sigma(A\circ B) = \sigma(S^{-1}(A\circ B)S) = \sigma(S(A^T\circ B^T)S^{-1})$。因为 $\rho(A\circ B)$ 是 $A\circ B$ 的一个特征值,那么 $\rho(A\circ B) \in \sigma(S(A^T\circ B^T)S^{-1})$。

设 $\rho(A\circ B) = \lambda$,由引理 2 知,存在数对 (i,j),$i \neq j(1 \leqslant i,j \leqslant n)$,使得

$$|\lambda - a_{ii}b_{ii}||\lambda - a_{jj}b_{jj}| \leqslant \sum_{k\neq i}\frac{a_{ki}b_{ki}}{s_k}s_i\sum_{k\neq j}\frac{a_{kj}b_{kj}}{s_k}s_j = \sum_{k\neq i,a_{ki}\neq 0}\frac{a_{ki}b_{ki}}{s_k}s_i\sum_{k\neq j,a_{kj}\neq 0}\frac{a_{kj}b_{kj}}{s_k}s_j \leqslant$$

$$\sum_{k\neq i,a_{ki}\neq 0}\frac{a_{ki}b_{ki}}{a_{ki}h_k}s_i\sum_{k\neq j,a_{kj}\neq 0}\frac{a_{kj}b_{kj}}{a_{kj}h_k}s_j \leqslant s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}$$

即

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}]^{\frac{1}{2}}\}$$

则

$$\rho(A\circ B) \leqslant \max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}]^{\frac{1}{2}}\}$$

若 $A\circ B$ 可约。令 $T = (t_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶置换矩阵,且 $t_{12} = t_{23} = \cdots = t_{n-1,n} = t_{n1} = 1$,其余的 $t_{ij} = 0$,则对于任意正实数 η,当 η 充分小时,使得 $A + \eta T$ 和 $B + \eta T$ 都是不可约非负矩阵,若用 $A + \eta T$,$B + \eta T$ 代替 A,B,并令 $\eta \to 0$,则结论仍然成立。证毕。

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,$B = (b_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是非负矩阵,则

$$\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii} + s_i\sum_{j\neq i}\frac{b_{ji}}{h_j}\right\}$$

证明 不失一般性,对于 $i \neq j(1 \leqslant i,j \leqslant n)$,设

$$a_{ii}b_{ii} + s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k} \geqslant a_{jj}b_{jj} + s_j\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k} \tag{2}$$

则(2)式等价于

$$s_j\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k} \leqslant a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k} \tag{3}$$

由(1)式与(3)式,可知

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k})]^{\frac{1}{2}}\} =$$

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k} + (2s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k})^2]^{\frac{1}{2}}\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+2s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k})^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+2s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\right\}=$$

$$a_{ii}b_{ii}+s_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}$$

故

$$\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+$$

$$4s_is_j\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{h_k}\sum_{k\neq j}\frac{b_{kj}}{h_k}]^{\frac{1}{2}}\}\leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+s_i\sum_{j\neq i}\frac{b_{ji}}{h_j}\right\}$$

注　定理 2 说明,定理 1 的结果改进了文献[7]中定理 2 的结果。

2　实　例

例 设

$$A=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\2&5&1&1\\0&2&4&1\\1&1&1&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&4&3\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

由估计式

$$\rho(A\circ B)\leqslant\rho(A)\rho(B)=50.1274$$

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(A)\rho(B)-a_{ii}\rho(B)-b_{ii}\rho(A)\}=25.5364$$

$$\rho(A\circ B)\leqslant(1+\rho(J'_A)\rho(J'_B))\max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ii}b_{ii})=39.7468$$

由文献[5]中的定理 4,得

$$\rho(A\circ B)\leqslant 25.3644$$

由估计式

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+m_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}=23.2$$

由文献[7]中定理 2,得

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+s_i\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|}{h_j}\right\}=23$$

应用本文的定理 1,得

$$\rho(A\circ B)\leqslant 22$$

而 $\rho(A\circ B)$ 的真值为:

$$\rho(A\circ B)=20.7439$$

注　通过数值算例的结果,可知定理 1 的结果有效地改进了文献[7]中定理 2 的结果,也改进了其他文献的结果。

参 考 文 献:

[1] Horn R A,Johnson C R.Topics in matrix analysis[M].New York:Cambridge University Press,1991.

[2] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[3] Fang M Z.Bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl,2007,425:7-15.

[4] Huang R.Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl,2008,428:1551-1559.

[5] Liu Q B,Chen G L.On two inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl,2009,431:974-984.

[6] Li Y T,Li Y Y,Wang R W,et al.Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl,2010,432:536-545.

[7] 刘 新,杨晓英.非负矩阵的 Hadamard 积谱半径上界的估计[J].四川理工学院学报:自然科学版,2010,23(2):152-154.

[8] Horn R A,Johnson C R.Matrix Analysis[M].UK:Cambridge University Press,1985.

Upper Bound on the Spectral Radius of the Hadamard Product of Nonnegative Matrices

LIU Xin, *YANG Xiao-ying*

(Ministry of Basic Education, Sichuan Information Technology College, Guangyuan 628017, China)

Abstract: Let A and B be nonnegative matrices, a new upper bound on the spectral radius $\rho(A\circ B)$ of nonnegative matrices A and B is obtained. The new estimating formula is easy to calculate since it only depends on the entries of matrices. Theoretical analysis and numerical example show that the new bound improves several existing results.

Key words: nonnegative matrix; Hadamard product; spectral radius; upper bound