文章编号:1673-1549(2013)01-0087-03　　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.021

幂和不等式及其在偏微分中的应用

龙群飞，曹文慧，杨文斌

(云南民族大学数学与计算机科学学院，昆明 650500)

摘　要:讨论了幂和不等式和命题 1 的不等式。用数学归纳法、柯西 – 施瓦兹不等式使幂和不等式在相应的估计运算过程中更简洁明了。并用实例说明幂和不等式的用途。

关键词:幂和不等到式;应用;偏微分

中图分类号:O178　　**文献标志码**:A

本文讨论了在研究文献[1]时总结出来的结果。在解决文献[1]的证明过程时,用直接计算的方法去处理像“已知 $\|\partial_x^2 N_t\| \leqslant C\sum_{k=1}^{3}(\|\partial_x^k u\| + \|\partial_x^k N\|)$ 和对满足小性的 δ_1 且有 $\|\partial_x u\| \leqslant \delta_1$，求证 $\|\partial_x^2 N_t\|^4 \leqslant C(\sum_{k=1}^{3}(\|\partial_x^k u\| + \|\partial_x^k N\|))^4 + C\delta_1\|\partial_x u\|^2$”这样的问题时,是一个冗长而繁琐的过程,而且容易出错,况且这只是对其进行估计。本文结合二项式的 2、3 次幂的估计,改进了文献[2 – 9]的现有结果。

1　幂和不等式

命题 1　如果 $a,b \geqslant 0$,那么对 $\forall m,n \in N$,不等式

$$a^m b^n + a^n b^m \leqslant a^{m+n} + b^{m+n} \tag{1}$$

成立。其中等号成立当且仅当 $a = b$。

证明　因为

$$(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m b^n + a^n b^m) =$$
$$(a^{m+n} + b^m b^n) - (b^{m+n} - a^n b^m) =$$
$$a^m(a^n - b^n) + b^m(a^n - b^n) =$$
$$(a^m - b^m)(a^n - b^n)$$

由 $a,b \geqslant 0, \forall m,n \in N$ 所以 $a^m - b^m$ 与 $a^n - b^n$ 同正负,因此有 $(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m b^n + a^n b^m) \geqslant 0$,即不等式(1)成立。

命题 2　(幂和不等式)如果 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 是 n 个非负数,那么这 n 个数的和的 p ($p \geqslant 0$) 次幂小于等于它们各自的 p 次幂的和的 n^{p-1} 倍。那就是

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^p \leqslant n^{p-1}(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p) \tag{2}$$

等号成立当且仅当 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 全部相等或者 $p = 1$ 时;此外有

$$n^p(\min\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n\})^p \leqslant$$
$$n^p(\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n\})^p$$

证明　用归纳法证明

1^0　当 $p = 1$ 时,命题显然成立。

2^0　当 $p = 2$ 时,有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} a_k a_j \tag{3}$$

因为

$$\sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} a_k a_j = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots\cdots a_1a_n +$$
$$a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots\cdots a_2a_n + \cdots\cdots + a_{n-1}a_n \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2) + \cdots\cdots +$$

收稿日期:2012-11-17

作者简介:龙群飞(1980-),男,贵州松桃人,硕士生,主要从事偏微分方程方面的研究,(E-mail)qflong80@126.com

$$\frac{1}{2}(a_1^2+a_n^2)+\frac{1}{2}(a_2^2+a_1^2+a_3^2)+$$

$$\frac{1}{2}(a_2^2+a_4^2)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(a_2^2+a_n^2)+$$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{2}(a_{n-1}^2+a_n^2)=\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \qquad (4)$$

把(2)式代入(1)式,得

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2\le n\sum_{i=1}^{n}a_1^2=n^{2-1}\sum_{i=1}^{n}a_1^2$$

当 $p=3$ 时,

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^3=(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2(\sum_{j=1}^{n}a_j)\le$$

$$n^{2-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{j=1}^{n}a_j) \qquad (5)$$

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{k=1}^{n}a_k)=\sum_{i=1}^{n}a_i^3+(a_1^2a_2+$$

$$a_1^2a_3+\cdots+a_1^2a_n+a_2^2a_1+a_2^2a_3+$$

$$a_2^2a_4+\cdots+a_2^2a_n+\cdots+a_n^2a_1+$$

$$a_n^2+\cdots+a\le \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^3+(a_1^2a_2+a_1a_2^2)+(a_1^2a_3+a_1a_3^2)+$$

$$\cdots+(a_1^2a_n+a_1a_n^2)+(a_2^2a_3+a_2a_3^2)+$$

$$(a_2^2a_4+a_2a_4^2)+\cdots+(a_2^2a_n+a_2a_n^2)+$$

$$\cdots+(a_{n-1}^2a_n+a_{n-1}a_n^2)$$

而

$$a_i^2a_j+a_ia_j^2=a_ia_j(a_i+a_j)\le$$

$$\frac{1}{2}(a_i^2+a_j^2)(a_i+a_j)=$$

$$\frac{1}{2}(a_i^3+a_j^3)+\frac{1}{2}(a_i^2a_j+a_ia_j^2)$$

从而推出

$$a_i^2a_j+a_ia_j^2\leqslant a_i^3+a_j^3(i\ne j,i,j=1,2,\cdots,n) \qquad (7)$$

把(7)式代入(6)式,可得

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{k=1}^{n}a_k)\le$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^3+(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^3=n\sum_{i=1}^{n}a_i^3 \qquad (8)$$

把(8)式代入(5)式,得

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^3\leqslant n^{3-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^3$$

所以当 $p=3$ 时命题成立。

3^0 假设 $p=m-1$ 时命题也成立。那么当 $p=m$ 时,有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{m-1}(\sum_{k=1}^{n}a_k)\le$$

$$(n^{m-1}\sum_{i=1}^{n}a^{m-1})(\sum_{k=1}^{n}a_k)=$$

$$n^{m-2}(\sum_{i=1}^{n}a_i^{m-1})(\sum_{k=1}^{n}a_k) \qquad (9)$$

而

$$(a_1^{m-1}a_3+a_1a_3^{m-1})+\cdots+$$

$$(a_1^{m-1}a_n+a_1a_n^{m-1})+$$

$$(a_2^{m-1}a_3+a_2a_3^{m-1})+(a_2^{m-1}a_4+a_2a_4^{m-1})+$$

$$\cdots+(a_2^{m-1}a_n+a_2a_n^{m-1})+$$

$$\cdots+(a_{n-1}^{m-1}a_n+a_{n-1}a_n^{m-1}) \qquad (10)$$

由(1)式知

$$a_i^{m-1}a_j+a_ia_j^{m-1}\leqslant a_i^m+a_j^m \qquad (11)$$

把(11)式代入(10)式,有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^{m-1})(\sum_{k=1}^{n}a_k)\le\sum_{i=1}^{n}a_i^m+$$

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^m+n\sum_{i=1}^{n}a_i^m \qquad (12)$$

把(12)式代入(9)式得到(2)′((2)′是表示(2)式中的 p 换成 m)。由数学归纳法知命题成立。

2 偏微分中的应用

对于前面的问题,如果用一般办法将其直接展开的话,运算量较大,况且这只是一种估计,相反用不等式(2),很快就可以得出结论。因为条件不等式的右边有6项,而且要求的是4次幂,所以其第一步结果就是

$$C^4[\|\partial_xu\|+\|\partial_xN\|+\|\partial_x^2u\|+\|\partial_x^2N\|+$$

$$\|\partial_x^3u\|+\|\partial_x^3N\|]^4\leqslant$$

$$6^3C^4(\|\partial_xu\|^4+\|\partial_xN\|^4+\|\partial_x^2u\|^4+$$

$$\|\partial_x^2N\|^4+\|\partial_x^3u\|^4+\|\partial_x^3N\|^4)$$

其它的只须根据条件、索伯勒夫不等式和要求就可以完成。

参 考 文 献:

[1] Ling Hsiao,Peter A,Wang Shu.The asymptotic behavior of globally Smooth solutions of multidimensional

isentropic hydrodynamic model for semiconductors[J]. Differential equations 2003,192:111-133.

[2] 邢家省,苏克勤,陶鹏飞.Young 不等式与 Young 逆不等式的应用[J].周口师范学院学报,2007,24(2):37-39.

[3] 秦飞龙,赵军芳.Aczel 不等式的新结果[J].四川理工学院学报:自然科学版,2012,25(1):94-96.

[4] 叶其孝,沈永欢.实用数学手册[M].北京:科学出版社,2006.

[5] 王 术.Sobolev 空间与偏微分方程引论[M].北京:科学出版社,2009.

[6] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义[M].北京:北京大学出版社,2008.

[7] E 贝肯巴赫,R 贝尔曼,著.文 丽,译.不等式入门[M].北京:北京大学出版社,1985.

[8] 匡继昌.常用不等式[M].济南:山东科学技术出版社,2010.

[9] Lawrence C.Partial differential equations[M].American Mathematical Society,1998.

Inequality of the Power of the Summation and Its application in Partial Defferntial

LONG Qun-fei, *CAO Wen-hui*, *YANG Wen-bin*

(School of Mathematics and Computer Science, Yunnan University of Nationalities, Kunming 650500, China)

Abstract: The inequalities of the summation of the power and the inequality of the Proposition 1 are discessed. It makes the corresponding estimation operation process of the inequalities of the summation of the power more simple and clear by mathematical induction and Cauchy-Schwartz's inequality. Finally, a example is give to demonstrate the use of the inequalities of the summation of the power.

Key words: inequality of the power of the summation; application; partial derivatives