第 26 卷第 1 期　四川理工学院学报(自然科学版)　Vol. 26　No. 1
2013 年 2 月　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　Feb. 2013
文章编号:1673-1549(2013)01-0071-05　DOI:10.3969/j.issn.1673-1549.2013.01.017

一类三次多项式系统的定性分析

蒋自国

(阿坝师范高等专科学校数学与财经系,四川 汶川 623002)

摘　要:研究一类具有二实不变直线的三次多项式微分系统 $x'=y(1-x^2)$,$y'=-x+\delta y+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2$,分析了奇点的性态,并运用形式级数法对原点 O 进行了中心－焦点判定。利用旋转向量场的理论和 Bendixson 判据得出了系统不存在极限环的充分条件,利用 Hopf 分支问题的 Liapunov 第二方法得到了该系统极限环存在性和稳定性的若干充分条件。

关键词:多项式系统;奇点;极限环;存在性;唯一性

中图分类号:O175.12　　**文献标志码**:A

引　言

对平面二次系统的定性分析已经形成了一些成熟的方法,并且有着广泛的应用[1-2]。随着系统次数的增加,对系统的定性分析的困难程度也会随之增大。近年来,对于平面三次系统的研究越来越多[3-9]。但仍有许多类型的三次系统有待深入讨论。2004 年,谢向东和张剑峰[10]引入了相伴系统的概念。对于多项式微分系统

$$\dot{x}=P(x,y),\dot{y}=Q(x,y) \tag{1}$$

$$\dot{x}=P(x,y),\dot{y}=Q(x,y)R(y) \tag{2}$$

其中 P,Q,R 为多项式,$R(y)=0$ 的根 $y=y_0$ 是系统(2)的不变直线,系统(2)称为系统(1)的相伴系统,亦称系统(1)、(2)为一对相伴系统。而部分三次系统可以看成是二次或三次系统的相伴系统。2005 年,谢向东和陈凤德[11－12]讨论了两类三次系统

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\dot{y}=x(1-y^2)$$

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\dot{y}=x(1+y^2)$$

它们是二次系统 I 类方程

$$\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\dot{y}=x$$

的分别具有二实、虚不变直线的相伴系统。同年,谢向东[13]完整地讨论了一类三次系统

$$\dot{x}=y,\ y=-x+\delta y+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2$$

2009 年,郑燕花和谢向东[14]讨论了该三次系统的具有二虚不变直线的一类相伴系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(1+x^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\delta y+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2\end{cases} \tag{3}$$

其中,b,l,m,n 均为实常数。对系统(3)进行了定性分析,给出了该系统极限环不存在性、唯一性的充分条件。

本文考虑与其相对应的具有二实不变直线的另一类相伴系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(1-x^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\delta y+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2\end{cases} \tag{4}$$

其中,b,l,m,n 均为实常数。与系统(3)比较,系统(4)中的 $P(x,y)$ 变为 $y(1-x^2)$,系统(4)的奇点情况将比系统(3)复杂。同时,在讨论系统(4)的极限环的存在性时,由于在文献[14]中 $1+x^2$ 恒不为零,而在系统(4)中 $1-x^2$ 可能为零,则文献[14]中的方法将失效。本文在讨论极限环存在性的时候,利用无切直线,将包含原点

收稿日期:2012-12-03
基金项目:四川省教育厅自然科学基金项目(12ZB168);阿坝师专重点科研课题项目(ASA11-27,ASA12-22)
作者简介:蒋自国(1974-),男,四川巴中人,教授,主要从事微分方程定性和稳定性方面的研究,(E-mail)jzgnl@163.com

的极限环的存在区域缩小为 $|x|<1$,从而避免了零作为分母的情况发生。同时,利用 Hopf 分支问题的 Liapunov 第二方法得到了该系统极限环存在性和稳定性的若干充分条件。

作变换 $(x,t)\to(-x,-t)$ 可改变 n 的符号,但不改变 m 的符号,又令 $(y,t)\to(-y,-t)$,可改变 m 的符号,但不改变 n 的符号,所以不妨假设 $n\geqslant 0, m\leqslant 0$。

1 奇点的性态

系统(4)的奇点即为方程组

$$\begin{cases} y(1-x^2)=0 \\ -x+\delta y+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2=0 \end{cases} \tag{5}$$

的解。令 $\Delta_{-1}=(\delta-m)^2+4(b-l)(n+1)$, $\Delta_1=(\delta+m)^2+4(b+l)(1-n)$,当 $b\neq l$ 且 $\Delta_{-1}\geqslant 0$ 时,令 $y_1=\dfrac{-m+\delta-\sqrt{\Delta_{-1}}}{2(b-l)}$, $y_2=\dfrac{-m+\delta+\sqrt{\Delta_{-1}}}{2(b-l)}$;当 $b\neq -l$ 且 $\Delta_1\geqslant 0$ 时,令 $y_3=\dfrac{-m-\delta-\sqrt{\Delta_1}}{2(b+l)}$, $y_4=\dfrac{-m-\delta+\sqrt{\Delta_1}}{2(b+l)}$;当 $m-\delta\neq 0$ 时,令 $y_5=\dfrac{1+n}{m-\delta}$;当 $m+\delta\neq 0$ 时,令 $y_6=\dfrac{1-n}{m+\delta}$,于是,当 $n\neq 0$ 时,有

(i) 当 $|b|\neq|l|$ 时,若 $\Delta_{-1}\geqslant 0, \Delta_1\geqslant 0$,则方程组(5)有 6 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(-1,y_1)$, $(-1,y_2)$, $(1,y_3)$, $(1,y_4)$;若 $\Delta_{-1}<0$, $\Delta_1\geqslant 0$,则方程组(5)有 4 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(1,y_3)$, $(1,y_4)$;若 $\Delta_{-1}\geqslant 0$, $\Delta_1<0$,则方程组(5)有 4 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(-1,y_1)$, $(-1,y_2)$;若 $\Delta_{-1}<0, \Delta_1<0$,则方程组(5)有 2 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$。

(ii) 当 $b-l=0, b+l\neq 0$ 时,若 $m-\delta\neq 0$, $\Delta_{-1}\geqslant 0$,则方程组(5)有 5 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(1,y_3)$, $(1,y_4)$, $(-1,y_5)$;若 $m-\delta\neq 0$, $\Delta_1<0$,则方程组(5)有 3 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(-1,y_5)$;若 $m-\delta=0$,则直线 $x=-1$ 上的所有点都是方程组(5)的解。

(iii) 当 $b-l\neq 0, b+l=0$ 时,若 $m-\delta\neq 0$, $\Delta_{-1}\geqslant 0$,则方程组(5)有 5 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(-1,y_1)$, $(-1,y_2)$, $(1,y_6)$;若 $m-\delta\neq 0$, $\Delta_1<0$,则方程组(5)有 3 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(1,y_6)$;若 $m-\delta=0$,则直线 $x=1$ 上的所有点都是方程组(5)的解。

(iv) 当 $b-l=0, b+l=0$ 时,若 $m-\delta\neq 0$,则方程组(5)有 4 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$, $(-1,y_5)$, $(1,y_6)$;若 $m-\delta=0$,则方程组(5)有 2 组解:$(0,0)$, $(1/n,0)$。

系统(4)的雅可比矩阵为:

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} -2xy & 1-x^2 \\ -1+2nx+my+by^2 & \delta+mx+2ly+2bxy \end{pmatrix}$$

则

$$J|_O=J(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$$

$$J|_N=J\left(\frac{1}{n},0\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1-\dfrac{1}{n^2} \\ 1 & \delta+\dfrac{m}{n} \end{pmatrix}$$

$$J|_{A_i}=J(-1,y_i)=\begin{pmatrix} 2y_i & 0 \\ -1-2n+my_i+by_i^2 & (-1)^{i+1}\sqrt{\Delta_{-1}} \end{pmatrix}, i=1,2$$

$$J|_{A_i}=J(1,y_i)=\begin{pmatrix} -2y_i & 0 \\ -1-2n+my_i+by_i^2 & (-1)^{i+1}\sqrt{\Delta_1} \end{pmatrix}, i=3,4$$

$$J|_{A_i}=J((-1)^i,y_i)=\begin{pmatrix} (-1)^{i+1}2y_i & 0 \\ -1-2n+my_i+by_i^2 & \delta+(-1)^i m \end{pmatrix}, i=5,6$$

首先讨论当 $\delta\neq 0$ 时的情况,根据上面的分析以及奇点类型判定的经典理论,有下面两个定理:

定理 1 当 $\delta\neq 0, n=0$ 时,系统(4)可能的有限处实奇点为:$O(0,0)$, $A_1(-1,y_1)$, $A_2(-1,y_2)$, $A_3(1,y_3)$, $A_4(1,y_4)$, $A_5(-1,y_5)$, $A_6(1,y_6)$。当以上奇点存在时:

(1)若 $\delta<-2$ 时,O 为稳定的结点;若 $-2<\delta<0$ 时,O 是稳定的粗焦点;若 $0<\delta<2$ 时,O 为不稳定的粗焦点,若 $\delta>2$ 时,O 为不稳定的结点。

(2)若 $b-l>0$ 时,A_1, A_2 为鞍点;若 $b-l<0$, $\delta-m>0$ 时,A_1 为鞍点,A_2 为不稳定的结点;若 $b-l<0$, $\delta-m<0$ 时,A_1 为不稳定的结点,A_2 为鞍点。

(3)若 $b+l>0$ 时,A_3, A_4 为鞍点;若 $b+l<0$, $\delta+m>0$ 时,A_3 为不稳定的结点,A_4 为鞍点;若 $b+l<0$, $\delta-m<0$ 时,A_3 为鞍点,A_4 为不稳定的结点。

(4)若 $m-\delta<-\sqrt{2}$ 或 $0<m-\delta<\sqrt{2}$ 时,A_5 为不稳定的结点;若 $-\sqrt{2}<m-\delta<0$ 或 $m-\delta>\sqrt{2}$ 时,A_5 为稳定的结点。

(5) A_6 为鞍点。

定理 2 当 $\delta\neq 0, n\neq 0$ 时,系统(4)可能的有限处实奇点为:$O(0,0)$, $N(1/n,0)$, $A_1(-1,y_1)$, $A_2(-1,y_2)$,

$A_3(1,y_3)$,$A_4(1,y_4)$,$A_5(-1,y_5)$,$A_6(1,y_6)$。当以上奇点存在时:

(1)O,A_1,A_2 的性态同定理 1。

(2)若 $0<n<1$ 时,A_3,A_4,A_6 的性态同定理 1,N 为焦点或结点。

(3)若 $n>1$ 时,N 为鞍点,A_6 为不稳定的结点,若 $b+l>0,\delta+m>0$,则 A_3 为鞍点,A_4 为不稳定的结点;若 $b+l>0,\delta+m<0$ 或 $b+l<0$,则 A_3 为稳定的结点,A_4 为鞍点。

(4)若 $m-\delta<-\sqrt{2(1+n)}$ 或 $0<m-\delta<\sqrt{2(1+n)}$ 时,A_5 为不稳定的结点;当 $-\sqrt{2(1+n)}<m-\delta<0$ 或 $m-\delta>\sqrt{2(1+n)}$ 时,A_5 为稳定的结点。

其次,当 $\delta=0$ 时,O(0,0)是系统(4)所对应线性系统的中心,需要对奇点进行中心-焦点判定,采用形式级数法来研究当 $\delta=0$ 时奇点 O(0,0)的性态。

定理 3　当 $\delta=0$ 时,有

(1)若 $m(n+l)>0$ 时,O(0,0)为系统(4)的一阶不稳定细焦点。

(2)若 $m(n+l)<0$ 时,O(0,0)为系统(4)的一阶稳定细焦点。

(3)若 $m=0$ 或 $n=l=0$ 时,O(0,0)为系统(4)的中心。

证明　当 $\delta=0$ 时,令 $F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots$,其中 F_m 是 x 与 y 的 m 次齐次多项式($m=3,4,\cdots$),则有

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{(4)}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)(y-x^2y)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)(-x+nx^2+mxy+ly^2+bxy^2)\tag{6}$$

令(6)式右端的 3 次项为 0,有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_3}{\partial y}+2y(nx^2+mxy+ly^2)=0$$

取极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,并消去 r^3 后可得

$$\frac{dF_3(\cos\theta,\sin\theta)}{dt}=2n\cos^2\theta\sin\theta+2m\cos\theta\sin^2\theta+2l\sin^3\theta$$

从而,

$$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=-\frac{2}{3}(2l+n)\cos^3\theta-2l\cos\theta\sin^2\theta+\frac{2}{3}m\sin^3\theta$$

即

$$F_3(x,y)=-\frac{2}{3}(2l+n)x^3-2lxy^2+\frac{2}{3}mx^3$$

令(6)式右端的 4 次项为 0,有

$$x\frac{\partial F_4}{\partial y}-y\frac{\partial F_4}{\partial x}=-2(1+2nl)x^3y+2m(n-2l)x^2y^2+2(b-2l^2+m^2)xy^3+2lmy^4$$

式中取极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,并消去 r^4 后化简得

$$\frac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{dt}=-2(1+2nl)\cos^3\theta\sin\theta+2m(n-2l)\cos^2\theta\sin^2\theta+2(b-2l^2+m^2)\cos\theta\sin^3\theta+2lm\sin^4\theta$$

因为

$$\int_0^{2\pi}\frac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{dt}d\theta=\frac{1}{2}m(n+l)\pi$$

改取 F_4 满足方程

$$\frac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{dt}=-2(1+2nl)\cos^3\theta\sin\theta+2m(n-2l)\cos^2\theta\sin^2\theta+2(b-2l^2+m^2)\cos\theta\sin^3\theta+2lm\sin^4\theta-C_4$$

其中,$C_4=\frac{1}{4}m(n+l)$。设 $\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$,则有 $\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{(4)}=C_4r^4+\circ(r^4)$,于是,由基于 Liapunov 思想的形式级数法可知,当 $m(n+l)>0$ 时,O 为一阶不稳定细焦点;当 $m(n+l)<0$ 时,O 为一阶稳定细焦点。当 $m=0$时,有 $P(x,-y)=-P(x,y)$,$Q(x,-y)=Q(x,y)$,则 O 为系统(2)的中心。当 $l=n=0$ 时,有 $P(-x,y)=P(x,y)$,$Q(-x,y)=-Q(x,y)$,则 O 为系统(2)的中心。

2　极限环的存在性

引理 1　系统(4)的包围奇点 O(0,0)的闭轨必在区域 $nx<1$ 中。

证明　对系统(4)而言,当 $n\neq0$ 时,有 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{1-nx=0}=y\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,于是,直线 $1-nx=0$ 被系统(4)的奇点 N $(1/n,0)$所分割成的两段是无切的,故系统(4)的包围奇点 O(0,0)的闭轨不能与直线 $1-nx=0$ 相交,所以,包围点 O(0,0)的闭轨若存在,必在区域 $nx<1$ 中。当 $n=0$时结论自然成立。

引理 2　系统(4)的包围奇点 O(0,0)的闭轨必在区域 $|x|<1$ 中。

证明　对系统(4)而言,易知直线 $x=\pm 1$ 是系统(4)的两条不变直线,于是,系统(4)的包围奇点 O(0,0)的闭轨不能与直线 $x=\pm 1$ 相交,所以系统(4)的包围奇点 O(0,0)的闭轨必在区域 $|x|<1$ 中。

注　由引理 1、2 可知,系统(4)在 O 外围的极限环必在区域 $D=\{(x,y)\mid nx<1, |x|<1\}$ 中。

为了后面讨论问题的方便,采用文[1]的方法将系统(4)化为 Liénard 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-F(x)\\ \dfrac{dy}{dt}=-g(x)\end{cases}\tag{7}$$

其中

$$F'(x)\equiv f(x)=-(1-x^2)^{\frac{b-2}{2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{l}{2}}(mx+\delta)g(x)=$$

$$-(1-x^2)^{b-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{l}(nx^2-x)$$

定理 4　当下列条件之一成立时,系统(4)在 O 外围无极限环。

(1) $m=0$。

(2) $m<0$ 且 $\delta\leqslant m$。

(3) $m<0$ 且 $\delta\geqslant -m$。

证明　(1)当 $\delta=0$ 时,由定理 3 可知,奇点 O(0,0)为系统$(4)_{m=0}$的中心,从而系统$(4)_{m=0}$无极限环。当 $\delta\neq 0$ 时,因为包围奇点 O 的闭轨只能在区域 D 中,而在区域 D 内有,当 δ 在实数域 R 上变动时,系统$(4)_{m=0}$的奇点不变,且对任意固定的点 P(x,y)和任意实数 $\delta_1<\delta_2$ 有

$$\begin{vmatrix} y(1-x^2) & -x+\delta_2 y+nx^2+ly^2+bxy^2\\ y(1-x^2) & -x+\delta_1 y+nx^2+ly^2+bxy^2\end{vmatrix}=$$

$$y^2(\delta_1-\delta_2)(1-x^2)\leqslant 0$$

且等号不在系统$(4)_{m=0}$的任意整条轨线上成立。则系统$(4)_{m=0}$关于 δ 构成广义旋转向量场[15],又 $\delta=0$ 时,O 为系统$(4)_{m=0}$的中心,所以,由旋转向量场的性质可知,当 $\delta\neq 0$ 时,系统(4)在 O 外围无极限环。于是,当 $m=0$ 时,系统(4)在 O 外围无极限环。

(2)当 $m<0$ 时,由引理 2 可知,系统(4)的包含 O 的极限环必在区域 $|x|<1$ 中,从而 $1-x^2>0$。当 $\delta\leqslant m$ 时,$\dfrac{\delta}{m}\geqslant 1$,于是,$mx+\delta=m(x+\dfrac{\delta}{m})<0$,从而 $F'(x)\equiv f(x)>0$。根据 Bendixson 判据(文献[1]定理 1.10),有 $\delta\leqslant m$ 时,系统(4)在 O 外围无极限环。同理可证,当条件(3)成立时,系统(4)在 O 外围无极限环。

以下的讨论均假设 $m<0$。

定理 5　下列条件之一成立时,系统(4)在 O 外围至少存在一个极限环,且 $\delta<0$ 时所产生的极限环不稳定,$\delta>0$ 时所产成的极限环稳定。

(1) $n+l<0$, $-1<<\delta<0$。

(2) $n+l>0$, $0<\delta<<1$。

证明　在定理 5 条件(1)下,由定理 1、3 可知,系统$(4)|_{\delta=0}$以 O(0,0)为不稳定细焦点,而当 $-1<<\delta<0$ 时,系统(4)以 O(0,0)为稳定粗焦点,由 Hopf 分支问题的 Liapunov 第二方法(文献[16]第 8 章定理 1.1)可知在此两种参数条件下系统(4)在点 O(0,0)外围至少产生一个不稳定的极限环。

在定理的条件(2)下,由定理 1、3 可知,系统(4)$|_{\delta=0}$以 O(0,0)为稳定细焦点,而当 $0<\delta\ll 1$ 时,系统(4)以 O(0,0)为不稳定粗焦点,由 Hopf 分支问题的 Liapunov第二方法(见文献[16]第 8 章定理 1.1)可知在此两种参数条件下系统(4)在点 O(0,0)外围至少产生一个稳定的极限环。

参 考 文 献:

[1] 叶彦谦.极限环论[M].上海:上海科学技术出版社,1984.

[2] 叶彦谦.多项式微分系统定性理论[M].上海:上海科学技术出版社,1995.

[3] Devlin J,Lloyd N G,Pearson J M.Cubic systems and abel equations [J]. Differential Equations, 1998, 147: 435-454.

[4] 刘一戎,陈海波.奇点量公式的机器推导与一类三次系统的前 10 个鞍点量[J].应用数学学报,2002,25(2):295-302.

[5] 韩茂安.一类三次系统极限环的个数与分布[J].数学年刊,2002,23A(2):143-152.

[6] 尚德生.一类三次系统的大同宿轨分支[J].数学进展,2009,38(6):755-760.

[7] 杨宇俊,张剑峰.一类三次系统的极限环与分支问题[J].高校应用数学学报,2006,21(4):405-412.

[8] Zhang Weinian, Hou Xiaorong, Zeng Zhenbing. Weak centers and bifurcation of critical periods in reversible

cubic systems[J]. Computers and Mathematics with Applications,2000,40:771-782.

[9] 桑 波,朱思明.一类可逆三次系统的等时中心[J].系统科学与数学,2008,28(2):129-135.

[10] 谢向东,张剑峰.平面多项式系统及相伴系统[J].数学研究,2004,37(2):161-166.

[11] 谢向东,陈凤德.一类三次系统的极限环个数与奇点分支[J].系统科学与数学,2005,25(4):414-422.

[12] 谢向东,陈凤德.一类具有二虚不变直线的三次系统的极限环与分支[J].数学物理学报,2005,25A(4):538-545.

[13] 谢向东.一类 E 1_3 系统极限环的唯一性[J].高校应用数学学报 A 辑,2004,19(1):23-30.

[14] 郑燕花,谢向东.一类具有二虚不变直线的三次系统的极限环[J].高校应用数学学报,2009,24(1):47-52.

[15] 张芷芬,丁同仁.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,1985.

[16] 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社,2000.

Qualitative Analysis for a Class of Cubic Polynomial Differential System

JIANG Zi-guo

(Department of Mathematic, ABa Teachers College, Wenchuan 623000, China)

Abstract: A class of cubic polynomial differential system with two real invariant line $x' = y(1 - x^2)$, $y' = -x + \delta y + nx^2 + mxy + ly^2 + bxy^2$ is studied. The character of the critical point is studied and center-focus to critical point O is judged by form series' method. Using the theory of a rotating vector field and Bendixson's theory, the sufficient conditions for no-existence of limit cycles is obtained. By using the second method of Liapunov for Hopf bifurcation problem, some sufficient conditions for the existence and stability of limit cycle of the system is obtained.

Key words: polynomial system; singular point; limit cycle; existence