

人口的预测和控制模型

王光清

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

摘要:针对人口的预测和控制问题,在综合考虑到人口有一定增长的前提下,为了适当控制和调整人口日益老化的问题,建立了人口分布数学模型,研究控制人口增长和老化的生育策略。利用微分法对模型进行了求解,并对结果进行了可行性分析。结果表明该数学模型对人口发展进行分析和预测具有一定的参考价值。

关键词:人口分布函数;年龄密度函数;婴儿出生率;总和生育率;生育模式

中图分类号:F224.9

文献标志码:A

1 问题的提出

人口在一定增长的前提下适当控制和调整人口日益老化的问题是当今世界上最令人关注的问题之一。很多发展中国家的人口出生率过高,越来越严重地威胁着人类的正常生活,有些发达国家的自然增长率趋近于零,甚至变负,造成劳动力短缺,也是不容忽视的问题^[1]。对于中国而言,不但应该努力提高生产力,集中精力搞好经济建设,而且有效地控制好人口的增长,是中国能否达到小康水平,进而跻身中等发达国家行列的关键。由于我国五六十年代的人口政策失误,造成我国的人口总数增长太快,年龄结构方面也非常不合理,使得对人口增长的严格控制会导致人口老化问题严重,因此为了把年龄分布的结构调整到合适的水平,首先应该保证人口有一定增长的前提下适当控制人口的日益老化^[2],这是一项长期而又艰巨的任务。

2 模型假设

本文讨论的模型除了时间变量外,年龄是另一个重要的自变量。

假设 1 模型属于连续型,用偏微分方程描述,其特

点是便于理论分析^[3]。

假设 2 人口数量和结构变化的主要因素是出生、死亡和迁移等。本文不计迁移等社会因素的影响,只考虑自然的出生与死亡两种情况^[4]。

假设 3 在时刻 t , 年龄小于 n 的人口记作 $F(n, t)$, t 和 n 均为连续变量。设 F 是连续、可微函数,称人口分布函数。时刻 t 的人口总数记作 $N(t)$, 最高年龄记作 r_m ^[5], 于是对于非负非降函数 $F(n, t)$ 有

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t) \quad (1)$$

假设 4 定义年龄密度函数

$$Q(n, t) = \frac{\partial F}{\partial r}, 0 \leq n \leq r_m \quad (2)$$

其中 $Q(n, t)$ 表示时刻 t 年龄在区间 $[n, n + dn)$ 内的人数。 $Q(n, t)$ 非负且

$$Q(r_m, t) = 0 \quad (3)$$

假设 5 记 $\varphi(n, t)$ 为时刻 t 年龄为 n 的人的死亡率, $\varphi(n, t)Q(n, t)$ 表示时刻 t 年龄在 $[n, n + dn)$ 内单位时间死亡的人数。

3 建模

为得到年龄密度函数 $Q(n, t)$ 满足的方程,考察年

收稿日期:2012-10-15

基金项目:四川省教育厅重点项目(11ZA120)

作者简介:王光清(1969-),男,四川富顺人,副教授,主要从事高等数学建模与应用方面的研究,(E-mail)574111998@qq.com

龄时刻 t 到时刻 $t + dt$ 的在 $[n, n + dn)$ 内的人,他们中活着的人的年龄变为 $[n + dn_1, n + dn_1 + dn)$, 这里 $dn_1 = dt$, 而在 dt 这段时间内死亡的人数为 $\varphi(n, t)Q(n, t)dndt$, 于是

$$Q(n, t)dn - Q(n + dn_1, t + dt)dn = \varphi(n, t)Q(n, t)dndt$$

可写作

$$[Q(n + dn_1, t + dt) - Q(n, t + dt)] + [Q(n, t + dt) - Q(n, t)]dndt = -\varphi(n, t)Q(n, t)dndt$$

因 $dn_1 = dt$, 可得到年龄密度函数 $Q(n, t)$ 的一阶偏微分方程

$$\frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial t} = -\varphi(n, t)Q(n, t) \tag{4}$$

其中死亡率 $\varphi(n, t)$ 为已知函数。

方程(4)有两个定解条件:(1) 婴儿出生率是指单位时间出生的婴儿数记作 $Q(0, t) = f(t)$; (2) 初始密度函数记作 $Q(n, 0) = Q_0(n)$ 。 $Q_0(n)$ 可由人口调查资料得到, 属于是已知函数^[6], 婴儿出生率 $f(t)$ 则对人口预测和控制起着重要作用。

将方程(4)、(3)及定解条件写作:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial t} = -\varphi(n, t)Q(n, t), t \geq 0, 0 \leq n \leq r_m \\ Q(n, 0) = Q_0(n) \\ Q(0, t) = f(t) \\ Q(r_m, t) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

从方程(5)确定出密度函数 $Q(n, t)$ 以后, 便可以得到每个年龄的人口数, 即人口分布函数^[7]

$$F(n, t) = \int_0^n Q(s, t) ds \tag{6}$$

方程(5)的求解过程比较复杂, 这里只给出一种特殊情况下的结果。在社会安定和不太长的时间内, 死亡率大致与时间无关, 于是可近似地假设 $\varphi(n, t) = \varphi(n)$, 这时方程(5)的解为

$$Q(n, t) = \begin{cases} Q_0(n - t)e^{-\int_0^t \varphi(s) ds}, 0 \leq t \leq n \\ f(n - t)e^{-\int_0^t \varphi(s) ds}, t > n \end{cases} \tag{7}$$

可以验证(7)式满足方程(5)。当 $t < n$ 时, $Q(n, t)$ 完全由年龄为 $n - t$ 的人口初始密度 $Q_0(n, t)$ 和这些人的死亡率 $\varphi(s) (n - t \leq s < t)$ 决定; 而当 $t > n$ 时, $Q(n, t)$ 则由未来的生育状况 $f(t - r)$ 及死亡率 $\varphi(s) (0 \leq s < n)$ 决定。可从人口统计数据得到在方程(5)或(7)式中 $Q_0(n)$ 和 $\varphi(n)$, 也可由 $\varphi(n, 0)$ 粗略估计 $\varphi(n, t)$, 这样, 人口的预测和控制的发展状况, 婴儿出生率 $f(t)$ 就

成为可以用作控制的主要手段了。

记女性性别比函数为 $k(n, t)$, 即时刻 t 年龄在 $[n, n + dn)$ 的女性人数为 $k(n, t)Q(n, t)$, 将这些女性在单位时间内平均每人的生育数记作 $b(n, t)$, 设育龄区间为 $[n_1, n_2]$, 则

$$f(t) = \int_{n_1}^{n_2} b(n, t)k(n, t)Q(n, t)dn \tag{8}$$

再将 $b(n, t)$ 定义为

$$b(n, t) = \beta(t)h(n, t) \tag{9}$$

其中 $h(n, t)$ 满足

$$\int_{n_1}^{n_2} h(n, t)dn = 1 \tag{10}$$

于是

$$\beta(t) = \int_{n_1}^{n_2} b(n, t)dn \tag{11}$$

$$f(t) = \beta(t) \int_n^{n_2} h(n, t)k(n, t)Q(n, t)dn \tag{12}$$

由(11)式可以看出, $\beta(t)$ 是时刻 t 单位时间内平均每个育龄女性的生育数。如果所有育龄女性在她育龄期所及的时刻都保持这个生育数, 那么 $\beta(t)$ 也表示平均每个女性一生的总和生育数, 所以 $\beta(t)$ 称为总和生育率或生育胎次。

从(9)式、(10)式及 $b(n, t)$ 的含义可以看出, $h(n, t)$ 是年龄为 n 女性的生育加权因子, 称生育模式。在稳定环境下可以近似地认为它与 t 无关, 即 $h(n, t) = h(n)$, $h(n)$ 表示了在某些年龄生育率高, 某些年龄生育率低。由人口统计资料可以知道当前实际的 $h(n, t)$, 作理论分析时人们常采用的 $h(n)$ 的一种形式是借用概率论中的 $\beta(t)$ 分布

$$h(n) = \frac{(n - n_1)^{\alpha-1} e^{-\frac{n-n_1}{\theta}}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}, n > n_1 \tag{13}$$

取 $\beta(t)$, 这时有

$$n_c = n_1 + N - 2 \tag{14}$$

可以看出, 提高 n_1 意味着晚婚, 而增加 N 意味着晚育^[8]。

这样, 人口发展方程(5)和单位时间出生的婴儿数 $f(t)$ 的表达式(12)式构成了连续型人口模型。

模型中死亡率函数 $\varphi(n, t)$ 、性别比函数 $k(n, t)$ 和初始密度函数 $Q_0(n)$ 均可以由人口统计资料直接得到, 或在资料的基础上估计, 而生育率 $\beta(t)$ 和生育模式 $h(n, t)$ 则是可以用于控制人口发展过程的两种手段, $\beta(t)$ 可以控制生育的多少, $h(n, t)$ 可以控制生育的早晚和疏密, 我国的计划生育政策必须严格通过这两种手段实施。

4 结束语

从控制论观点看,在方程(5)描述的人口系统中 $Q(n,t)$ 可视为状态变量, $Q(0,t) = f(t)$ 视为控制变量,是分布参数系统的边界控制函数,(12)式表明含有状态变量的控制输入,形成了状态的反馈, $\beta(t)$ 则视为反馈增益,并且它是一种正的反馈,即人口密度函数 $Q(n,t)$ 的增加,通过婴儿出生率 $f(t)$ 又使 $Q(n,t)$ 进一步增大。(7)式中因子 $f(t-n)$ 表明这种反馈还有相当大的滞后作用,所以一旦人口政策失误,使 $Q(n,t)$ 在一段时间内如果增长得过快过多,再希望通过控制手段 $\beta(t)$ 和 $h(n,t)$ 把人口增长的势头降下来就很困难^[9],并且常常需要相当长(几代人)的时间。

参考文献:

[1] 杜道渊,柏宏斌,周锋.基于 BP 神经网络自贡房地产价格走势预测[J].四川理工学院学报:自然科学

版,2011,24(3):366-369.

[2] 徐全智,杨晋浩.数学建模[M].北京:高等教育出版社,2003.

[3] 叶君,杨岩.水质评价模型[J].四川理工学院学报:自然科学版,2007,20(2):25-29.

[4] 赫孝良.数学建模竞赛赛题简析与论文点评[M].西安:西安交通大学出版社,2002.

[5] 蔡宜三.最优化与最优控制[M].北京:清华大学出版社,1982.

[6] 胡运权,郭耀煌.运筹学教程[M].北京:清华大学出版社,1998.

[7] 姜启源,谢金星.数学建模案例选集[M].北京:高等教育出版社,2006.

[8] 李永亮.人口预测中的模型选择与参数认定[J].财经科学,2004(2):31-35.

[9] 佟新.人口社会学[M].北京:北京大学出版社,2006.

Model of Population Prediction and Control

WANG Guang-qing

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Prediction and control problems for the population is researched. In order to properly control and adjust the aging population under the premise of certain population growth, a model of population distribution is established to research and control the reproductive strategy of the population growth and aging. The mathematical model is solved through the differential method, and the results of a feasibility analysis is also carried on. The result demonstrates that this mathematical model has a certain reference value to the analysis and forecasting of population development.

Key words: population distribution function; age density function; birth rate; total fertility rate; reproductive pattern