

一类具有饱和发生率的 SIRS 传染病模型的全局性分析

崔倩倩, 张 强

(石河子大学理学院, 新疆 石河子 832003)

摘 要: 研究了一类具有饱和发生率且总人口具有常数输入的 SIRS 型传染病模型, 得到了地方病平衡点存在的阈值条件。通过构造合适的李雅普诺夫函数, 得到了模型无病平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性, 最后对所得理论结果进行了数值模拟。

关键词: 饱和发生率; 渐近稳定性; Lyapunov 函数

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

早在 1927 年, Kermack - Mckendrich 在基于三个假设的基础上, 建立了传染病动力学中经典的 SIR 模型(简称 K - M 模型)。在 K - M 模型中把人群分为三类: 易感者类、染病者类和移出者类, 分别用数学符号 $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 表示这三类人群在时刻 t 的人群数量, 并假设传染力与易感者类成正比, 这在一定程度上是成立的, 因为, 若易感者类人数多, 则一个病人与易感者接触的机会就多, 因而传染率就大, 但是在易感者人数很大时, 一个病人与他人的接触能力总是有限的, 这个时候再假设传染力与易感者成正比就显得不合理了, 因此, 由于接触能力的限制, 传染力总有一个饱和状态。对此, May 和 Anderson 提出了用饱和发生率的模型作为例子来说明可以产生稳定的极限环^[1]。文献[2]考虑具有饱和发生率 $\frac{\beta SI^p}{1 + \alpha I^p}$ 的传染病模型, 文献[3]采用了当 $p = q = 1$ 的情况, 研究了人类免疫缺陷病毒 1 型和丙型肝炎病毒, 文献[4]讨论了当 $p = q = 2$ 时的 SIRS 型传染病模型, 并分析了这类模型的分支情况, 文献[5 - 8]同样也研究了饱和发生率的传染病模型。受文献[3, 6]的启发, 本文考虑输入人群不是仅进入易感者类的 SIRS 传染病模型, 而分别是易感者类和移除者类的情况, 并建立、讨论此类模型的全局性性质, 最后通过数值模拟验证结论的正确性。

1 模型及其平衡点

设 $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示易感者类、感染者类和移除者类在时刻 t 的人数, A 是常数输入率, aA 为进入易感者类的输入率, bA 为进入移出者类的输入率, 且 $a + b = 1, a, b > 0$, d 是自然死亡率系数, u 是因病死亡率系数, γ 是恢复率系数, δ 是失去免疫率系数, 则易感者和移除者具有人口变动和饱和发生率为 $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ 的

SIRS 传染病模型为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = aA - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + \delta R - dS \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (u + \gamma + d)I \\ \frac{dR}{dt} = bA - (\delta + d)R + \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

其中总人口数 $N = S + I + R$, $A, \beta, \gamma, d, u, \delta$ 均为正常数, 因此, 由模型(1)知 $N'(t)$ 满足方程

$$N'(t) = A - dN - uI \quad (2)$$

由方程(2)知, 当疾病不存在时, 总人口数 $N(t)$ 最终趋向于常数 $\frac{A}{d}$ 且当 $N > \frac{A}{d}$ 时, $N'(t) < 0$, 因此, 模型(1)的全部解 (S, I, R) 最终趋向进入或者停留在区域 D 内, 其中

$$D = \left\{ (S, I, R) \in R_+^3; 0 < S + I + R \leq \frac{A}{d} \right\}$$

显然,区域 D 是模型(1)的正不变集,这里 $R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ 。

定义

$$R_0 = \frac{\beta A(a\delta + b\delta + ad)}{d(\delta + d)(u + \gamma + d)}$$

易知 R_0 是模型(1)的基本再生数。

定理 1 模型(1)总是存在无病平衡点 $E^0(S^0, I^0, R^0)$, 其中

$$S^0 = \frac{A(a\delta + b\delta + ad)}{d(\delta + d)}$$

$$I^0 = 0$$

$$R^0 = \frac{bA}{\delta + d}$$

当 $R_0 > 1$ 时,模型(1)存在唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, R^*)$, 其中

$$S^* = \frac{(u + \gamma + d)(1 + \alpha I)}{\beta}$$

$$R^* = \frac{bA + \gamma I}{\delta + d}$$

$$I^* = \frac{d(\delta + d)(u + \gamma + d)(R_0 - 1)}{(\beta + \alpha d)(\delta + d)(u + \gamma + d) - \beta\delta\gamma}$$

易证定理 1。

2 平衡点的全局渐近稳定性

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 $E^0(S^0, I^0, R^0)$ 在区域 D 内是全局渐近稳定的。

证明 定义如下的李雅普诺夫函数

$$V(S, I, R) = \frac{1}{2}(S + I + R - S^0 - I^0 - R^0)^2 +$$

$$\frac{u}{\beta}I + \frac{u}{2\gamma}(R - R^0)^2$$

计算 $V(S, I, R)$ 沿着模型(1)轨线求导可得

$$\frac{dV(S, I, R)}{dt} = (S + I + R - S^0 - I^0 - R^0)$$

$$(-d(S + I + R - S^0 - I^0 - R^0) -$$

$$u(I - I^0)) + \frac{u}{\beta}I \left(\frac{\beta S}{1 + \alpha I} - \frac{\beta S}{1 + \alpha I^0} +$$

$$\frac{\beta S^0}{1 + \alpha I^0} - \frac{\beta S^0}{1 + \alpha I^0} + \frac{\beta S^0}{1 + \alpha I^0} - (u + \gamma + d) \right) +$$

$$\frac{u}{\gamma}(R - R^0)(-(\delta + d)(R - R^0) + \gamma(I - I^0)) =$$

$$-d(S + I + R - S^0 - I^0 - R^0)^2 - u(I - I^0)^2 -$$

$$u(S - S^0)(I - I^0) - u(I - I^0)(R - R^0) -$$

$$\frac{u\alpha SI(I - I^0)}{(1 + \alpha I)(1 + \alpha I^0)} + \frac{u}{1 + \alpha I^0}I(S - S^0) +$$

$$\frac{u(u + \gamma + d)}{\beta} \left(\frac{\beta S^0}{(1 + \alpha I^0)(u + \gamma + d)} - 1 \right) -$$

$$\frac{u(\delta + d)}{\gamma}(R - R^0)^2 + u(I - I^0)(R - R^0) \quad (3)$$

将 S^0, I^0 和 R^0 的表达式以及基本再生数 R_0 的表达式代入式(3)整理可得

$$\frac{dV(S, I, R)}{dt} = -d(S + I + R - S^0 - R^0)^2 -$$

$$uI^2 - \frac{u\alpha}{(1 + \alpha I)}SI^2 -$$

$$\frac{u(\delta + d)}{\gamma}(R - R^0)^2 + \frac{u(u + \gamma + d)}{\beta}(R_0 - 1)$$

由 $R_0 \leq 1$, 则对所有的 $(S, I, R) \neq (S^0, I^0, R^0)$, 有

$\frac{dV(S, I, R)}{dt} < 0$, 从而由 Lyapunov 函数理论可得模型

(1)的无病平衡点 $E^0(S^0, I^0, R^0)$ 是全局渐近稳定的。

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时,模型(1)的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, R^*)$ 在区域 D 内是全局渐近稳定的。

证明 定义李雅普诺夫函数

$$V(S, I, R) = \frac{(1 + \alpha I^*)}{\beta}(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}) +$$

$$\frac{1}{2\gamma}(R - R^*)^2 + \frac{1}{2u}(S + I + R - S^* - I^* - R^*)^2$$

计算此函数沿模型(1)的轨线求导,整理可得

$$\frac{dV(S, I, R)}{dt} = (S + I + R - S^* - I^* - R^*)$$

$$(-d(S + I + R - S^* - I^* - R^*) - u(I - I^*)) +$$

$$\frac{u(1 + \alpha I^*)}{\beta}(I - I^*)$$

$$\left(\frac{\beta S}{1 + \alpha I} - \frac{\beta S}{1 + \alpha I^*} + \frac{\beta S}{1 + \alpha I^*} - \frac{\beta S^*}{1 + \alpha I^*} \right) +$$

$$\frac{u}{\gamma}(R - R^*)(-(\delta + d)(R - R^*) + \gamma(I - I^*)) =$$

$$-d(S + I + R - S^* - I^* - R^*)^2 - u(I - I^*)^2 -$$

$$\frac{u\alpha S}{1 + \alpha I}(I - I^*)^2 - \frac{u(\delta + d)}{\gamma}(R - R^*)^2$$

从而可知对所有的 $(S, I, R) \neq (S^*, I^*, R^*)$, 有

$\frac{dV(S, I, R)}{dt} < 0$ 。由李雅普诺夫函数理论知,模型(1)的

地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, R^*)$ 是全局渐近稳定的。

3 数值模拟

选取初始值 $(S_0, I_0, R_0) = (10, 10, 10)$ 。首先验证定理2的正确性,选取参数 $A = 2, a = 0.6, b = 0.4, \beta = 0.2, \alpha = 0.6, \delta = 0.5, d = 0.5, \mu = 0.3, \gamma = 0.2$, 通过计算可得 $R_0 = 0.8 < 1, (S, I, R) = (4, 0, 0.8)$, 其图像如图 1 所示。

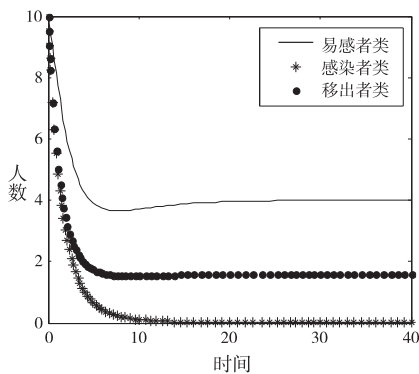


图 1 当 $R_0 > 1$ 时,各类人数变化图

由图 1 知,当 $R_0 \leq 1$ 时,模型的解趋向于无病平衡点 $E^0(S^0, I^0, R^0)$, 从而验证定理 2 的正确性。

其次,在初值不变的情况下,选取如下参数 $A = 4, a = 0.6, b = 0.4, \beta = 0.7, \alpha = 0.6, \delta = 0.5, d = 0.5, \mu = 0.3, \gamma = 0.2$, 通过计算可得 $R_0 = 5.6 > 1, (S, I, R) = (3.14, 1.98, 2.12)$, 其图像如图 2 所示。

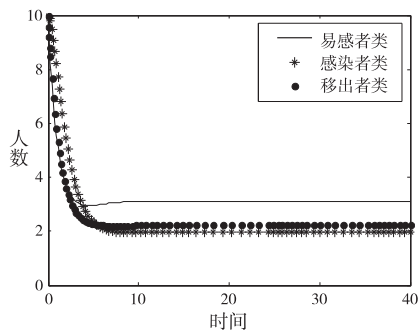


图 2 当 $R_0 > 1$ 时,各类人数变化图

由图 2 知,当 $R_0 > 1$ 时,模型的解稳定于地方病平衡点处,从而验证了本文结论的正确性。

4 结束语

当 $R_0 \leq 1$ 时,模型(1)有全局渐近稳定的平衡点 $E^0(S^0, I^0, R^0)$, 这是疾病消除;而当 $R_0 > 1$ 时,模型(1)

有全局渐近稳定的平衡点 $E^*(S^*, I^*, R^*)$, 此时疾病流行形成地方病,说明 $R_0 = \frac{\beta A(a\delta + b\delta + ad)}{d(\delta + d)(u + \gamma + d)} = 1$ 是疾病消除与否的阈值。

因此,在实际的疾病防控工作中,可以通过控制基本再生数 R_0 在小于等于 1 的范围内,从而控制疾病的扩散。可见本文的结论对疾病的预防和控制,有理论和实际的指导意义。

参考文献:

- [1] Anderson Roy M, May Robert M. Population biology of infectious diseases[J]. Nature, 1979, 180: 361-367.
- [2] Liu Weimin, Hethcote Herbert W, Levin Simon A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates[J]. J. Math. Biol. 1987, 25(4): 359-380.
- [3] Song X, Neumann A U. Global stability and periodic solution of the ciral dynamics [J]. J. Math. Anal. Appl. 2001, 329(1): 281-297.
- [4] Ruan Shigui, Wang Wendi. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. J. Differential Equations, 2003, 188: 135-163.
- [5] 季语, 闵乐泉, 苏永美, 等. 具有饱和发生率的病毒感染模型的全局稳定性分析[J]. 生物数学学报, 2004, 18(1): 52-56.
- [6] 高淑京, 滕志东. 一类具有饱和传染力和常数输入的 SIRS 脉冲接种模型研究[J]. 生物数学学报, 2008, 23(2): 208-217.
- [7] 苟清明, 王稳地. 一类具有饱和发生率的 SEIS 模型的全局渐进稳定性[J]. 生物数学学报, 2008, 23(2): 265-272.
- [8] 徐文雄, 张仲华, 徐宗本. 具有一般形式的饱和发生率和接触率 SEIS 模型的渐近分析[J]. 生物数学学报, 2005, 20(3): 297-302.

Global Analysis for a Class of SIRS Epidemic Model with Saturation Incidence

CUI Qian-qian, ZHANG Qiang

(School of Science, Shihezi University, Shihezi 832003, China)

Abstract: A class of SIRS epidemic model with saturation incidence and constant input number is researched, and the threshold for existence of endemic equilibrium is investigated. By constructing suitable Lyapunov functions, the global asymptotical stability for the disease-free equilibrium and endemic equilibrium of this model is obtained. The numerical simulations are carried out to illustrate the theoretical results.

Key words: saturation incidence; asymptotic stability; Lyapunov function