

Banach 空间中向量优化问题解集的刻画

李柳芬

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

摘要:在有限维空间中,当目标函数凸下半连续时,向量优化问题一定有解,并且解集是紧的。但在无穷维空间中,这不一定成立。不过可以通过在对偶空间中构造一个集合,减弱对目标函数的假设之后,把之前关于有限维空间中向量优化问题的解集的研究,推广到实自反 Banach 空间中。

关键词:向量优化;弱有效解;0-强制性;回收锥

中图分类号:O177.2

文献标志码:A

人们一直在探索着偏序线性空间中向量优化问题的最优元素,比如极小元、强极小元、真极小元或弱极小元。这类问题不仅在数学领域,而且在经济领域和机械设计领域都很常见,比如多目标规划、多指标决策、统计、合作游戏理论等。近十年来,向量优化问题被延拓到集值映射问题中,这一新的集合优化领域对于研究各种不等式及多值数值优化问题都起着非常重要的作用。直到今天向量优化已发展将近 60 年的历史,在社会经济中向量优化起着越来越重要的作用。对于带约束条件的向量优化问题在实际应用中很重要,我们有必要研究其解的存在性,甚至是更好的结果。

受 S. Deng 在文献[1-2]中的一些思想的启示,基于 Flores - Bazan, F. 在文献[3-4]中对非凸向量优化问题的研究以及 X. X. Huang 在文献[5-6]中对锥约束凸向量优化问题的研究,本文把 Flores - Bazan 和 Vera 在文献[7]有限维空间中关于向量优化问题解集的一些刻画推广到实自反 Banach 空间中。

1 预备知识

设 X 为实自反 Banach 空间, $E \subseteq X$ 为非空闭凸集, $C \subseteq R^m (m > 1)$ 为闭凸锥,并且 C 的拓扑内部 $\text{int}C \neq \Phi, f: E \rightarrow R^m$ 为向量值函数,考虑优化问题 (P) 找 $\bar{x} \in E$ 使得 $f(\bar{x}) - f(y) \notin \text{int}C, \forall y \in E$ 。向量 $x_0 \in E$ 称为问

题 (P) 的弱有效解或弱 Pareto 解,若 $f(x_0) - f(y) \notin \text{int}C, \forall y \in E$ 。问题 (P) 的解集记为 E_w 。

定义 1 设 $h: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ 为广义实值函数,称 h 在 $x_0 \in X$ 是下半连续的(简记为 $l.s.c$),若对任意的 $\{x_n\} \subseteq X$ 且 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow +\infty)$, 都有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) \geq h(x_0)$, 称 h 在 $x_0 \in X$ 是弱下半连续的(简记为 $w.l.s.c$),若对任意 $\{x_n\} \subseteq X$ 并且 $x_n \xrightarrow{w} x_0 (n \rightarrow +\infty)$, 都有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) \geq h(x_0)$ 其中 \xrightarrow{w} 表示按弱拓扑收敛。

定义 2 设 $h: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ 为广义实值函数,称 h 是 0-强制的,若 $\forall \{x_n\} \subseteq X$, 有 $\lim_{\|x_n\| \rightarrow +\infty} h(x_n) = +\infty$ 。

定义 3 设 $E \subseteq X$ 是非空凸集, $h: E \rightarrow R$ 为实值函数,称 h 在 E 上是凸的,若 $\forall x_1, x_2 \in E$, 有 $h(tx_1 + (1-t)x_2) \leq th(x_1) + (1-t)h(x_2), \forall t \in [0, 1]$ 。

定义 4 设 Y 为实赋范向量空间, $f: E \rightarrow Y$ 为向量值函数,称 f 在 $x_0 \in E$ 是 C -下半连续的(简记作 $C-l.s.c.$), 若任给 $V \in N_Y(f(x_0))$, 存在 $U \in N_X(x_0)$ 使得 $f(U \cap E) \subseteq V + C$, 若 f 在 E 上每一点均 $C-l.s.c.$, 则称 f 在 E 上是 $C-l.s.c.$ 的。

对于非空集合 $E \subseteq X$, 如文献[8]中定义 E 的回收锥为 $E^\infty = \{v \in X \mid \exists x_n \in E, t_n \rightarrow 0^+ \text{ 使得 } t_n x_n \xrightarrow{w} v\}$, 特别地,当 E 是闭凸集时, $E^\infty = \{v \in X \mid x + tv \in E\}$,

$\forall t > 0, x \in E$; 当 $E = \Phi$ 时, $E^\infty = \Phi$ 。对于定义在 E 上的下半连续凸函数 h , 定义其弱序列回收函数为

$$h^\infty(v) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{h(x + \lambda v) - h(x)}{\lambda} = \sup_{\lambda > 0} \frac{h(x + \lambda v) - h(x)}{\lambda}$$

$$\forall x \in \{x \in E \mid h(x) < +\infty\}$$

因为 $\text{int}C \neq \Phi$, 则对某个 $x_0 \in \text{int}C$, 可令 $A = \{r \in R^m \mid \langle r, c_0 \rangle = 1\}$, 设 A_0 为 A 的端点组成的集合, 则 $A = \text{co}(A_0)$, 从而 C 的极锥 $C^* \subseteq R^m$ 可写为 $C^* = \text{cone}(\text{co}(A_0))$, 用 $\langle x, y \rangle$ 表示 $x, y \in R^m$ 的内积。容易证明当 C^* 是闭凸尖锥时, 若 A_0 闭, 则

$$c \in \text{int}C \Leftrightarrow \langle a, c \rangle > 0, \forall a \in A_0$$

$$c \in C \Leftrightarrow \langle a, c \rangle \geq 0, \forall a \in A_0$$

设 $h_a: E \rightarrow R$ 为 $h_a(x) = \langle a, f(x) \rangle, \forall a \in A_0, x \in E$, 则 $E_w = \bigcap_{y \in E, a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(y)\}$ 。

引理 1 如果 $f: E \rightarrow R^m$ 是 $C-l.s.c.$ 的, 则 $\forall a \in A_0, h_a: E \rightarrow R$ 是 $l.s.c.$ 的。

引理 2 (1) 设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$ 非空, 则 $E_1^\infty \subseteq E_2^\infty$ 。

(2) 对某个指标集 I , 若 $\forall i \in I, E_i \subseteq X$ 非空闭凸, 且 $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \Phi$, 则 $(\bigcap_{i \in I} E_i)^\infty = \bigcap_{i \in I} E_i^\infty$ 。

2 主要结果

在有限维空间中, $E \subseteq X$ 有界 $\Leftrightarrow E^\infty = \{0\}$ 。但在无穷维空间中 $E^\infty = \{0\}$ 只是 E 有界的必要条件, 而非充分条件。不过可以构造一个集合 $N(e)$, 任给 $e \in E$, 令 $N(e) = \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e), \forall a \in A_0\}$, 该集合在后面的证明中起着非常重要的作用。另外给出如下的假设:

假设 (H₀) 任给 $\{x_n\} \subseteq E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty$, 存在 $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ 及 $t_k \rightarrow 0^+$ 使得 $t_k x_{n_k} \xrightarrow{w} d \in X$ 且 $d \neq 0$ 。

注 1 把文献[1]中的假设 (H₁) 减弱为上面的假设 (H₀), 可得下面的结论。

命题 1 设 $E \subseteq X$ 非空闭, 且满足假设 (H₀), 任取 $a \in A_0, h_a$ 是 $l.s.c.$ 的, 则 $\forall e \in E, N(e)$ 非空有界, 当且仅当, $[N(e)]^\infty = \{0\}$ 。

证明 “ \Rightarrow ” 是显然的。

“ \Leftarrow ”: $\forall e \in E$, 因为 $e \in N(e)$, 所以 $N(e)$ 非空。倘若 $N(e)$ 无界, 则 $\exists x_n \subseteq N(e)$ 使得 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 从而 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 有界。因为 X 自反, 则 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 存在弱收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} d$, 由 E 满足假设

(H₀) 知 $d \neq 0$, 显然 $d \in [N(e)]^\infty$, 这与 $[N(e)]^\infty = \{0\}$ 矛盾。

为了方便起见, 把后面将常用到的前提条件写为:

假设 (H₁) 设 X 为自反 Banach 空间, $E \subseteq X$ 为非空、闭、凸集, $C \subseteq R^m (m > 1)$ 为闭、凸锥, $\text{int}C \neq \Phi, C^* = \text{cone}(\text{co}(A_0)), A_0$ 闭, $f: E \rightarrow R^m$ 是 $C-l.s.c.$ 的, 任取 $a \in A_0, h_a(x)$ 凸。

注 2 在假设 (H₁) 下, 容易证明 $\forall e \in E, [N(e)]^\infty \subseteq E_w^\infty$, 则 $\bigcap_{e \in E} [N(e)]^\infty \subseteq E_w^\infty$ 。事实上, $\bigcap_{e \in E} [N(e)]^\infty = \bigcap_{e \in E} (\bigcap_{a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\})^\infty$ 。另外一方面, 因为 f 是 $C-l.s.c.$ 的, 则 h_a 是 $l.s.c.$ 的, 从而 $\bigcup_{a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\}$ 闭凸, 而 E_w 非空, 由引理 2(2) 知, $E_w^\infty = \bigcap_{y \in E} (\bigcup_{a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(y)\})^\infty$ 。

注 3 当 h_a 凸且 $l.s.c.$ 时, $[N(e)]^\infty = \bigcap_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\}, \forall e \in E$ 。

事实上, $\forall v \in \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\}^\infty, \exists x_n \in E$ 且 $h_a(x_n) \leq h_a(e)$ 及 $t_n \rightarrow 0^+$ 使得 $t_n x_n \xrightarrow{w} v$, 由 h_a 凸知, $\forall \lambda > 0$ 及充分大的 k , 有 $h_a(\lambda t_k x_{n_k} + (1 - \lambda t_k)e) \leq h_a(e)$, 因为凸下半连续函数必定是弱下半连续的, 所以当 k 充分大时, 有 $h_a(\lambda v + e) \leq h_a(e)$, 则

$$h_a^\infty(v) = \sup_{\lambda > 0} \frac{h_a(e + \lambda v) - h_a(e)}{\lambda} \leq 0, \forall e \in E$$

显然 $v \in E^\infty$, 故 $\forall v \in \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\}$ 。反之, $\forall d \in \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\}$ 有 $d \in E^\infty$ 且 $h_a^\infty(d) \leq 0$, 即 $\sup_{\lambda > 0} \frac{h_a(e + \lambda d) - h_a(e)}{\lambda} \leq 0$, 所以 $h_a(\lambda d + e) \leq$

$h_a(e), \forall \lambda > 0, e \in E$, 令 $x_n = e + nd, t_n = \frac{1}{n}$, 则 $x_n \in \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\}$ 且 $t_n \rightarrow 0^+$, 使得 $t_n x_n = \frac{1}{n}e + d \xrightarrow{w} d$, 故 $d \in \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\}^\infty$ 。

命题 2 在假设 (H₁) 下考虑问题 (P), 若 E_w 非空弱紧, 则 $\forall e \in E, N(e)$ 非空弱紧。

证明 因为 E_w 弱紧, 则 E_w 有界, 从而 $E_w^\infty = \{0\}$ 。对 $\forall e \in E$, 因为 $e \in N(e)$, 则 $N(e)$ 非空, 从而 $[N(e)]^\infty \neq \Phi$ 。由注 2 知道, $\forall e \in E, [N(e)]^\infty \subseteq E_w^\infty$ 且 $N(e)$ 闭, 故只可能 $[N(e)]^\infty = \{0\}$, 由命题 1 知, $N(e)$ 有界, 从而弱紧。

根据文献[1]中命题 4.2 和推论 3.1 有下面的结论。

命题 3 在假设 (H₁) 下考虑问题 (P), 若 E 满足

假设 (H_0) , 且 $\bigcup_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$, 则 $\forall a \in A_0, \arg \min_E h_a$ 是非空弱紧集。

证明 倘若对某个 $a_0 \in A_0, \arg \min_E h_{a_0}$ 无界, 则存在 $\{x_n\} \subseteq \arg \min_E h_{a_0}$ 使得 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 记 $m_{a_0} = \min_E h_{a_0}(x)$, 显然 $h_{a_0}(x_n) \leq m_{a_0}$, 且 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 有界。因为 X 自反, 则 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 存在弱收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} d$, 由 E 的回收紧性知道 $d \neq 0$, 另外 h_{a_0} 的凸性意味着, $\forall \lambda > 0$ 及充分大的 k , 有

$$h_{a_0}(\frac{\lambda}{\|x_n\|}x_n + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})y) \leq \frac{\lambda}{\|x_n\|}h_{a_0}(x_n) + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})h_{a_0}(y) \leq \frac{\lambda m_{a_0}}{\|x_n\|} + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})h_{a_0}(y)$$

因为 h_{a_0} 凸 $l. s. c.$, 所以 h_{a_0} 弱 $l. s. c.$, 从而当 n 充分大时, $h_{a_0}(\lambda d + y) \leq h_{a_0}(y) \Rightarrow h_{a_0}^\infty(d) \leq 0$, 取 $t_n = \frac{1}{\|x_n\|}$, 因为 $x_n \in E$, 则 $t_n x_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} d$, 故 $d \in E^\infty$, 即 $0 \neq d \in \{v \in E^\infty \mid h_{a_0}^\infty(v) \leq 0\}$ 。但是 $\{0\} = \bigcup_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = E^\infty \cap (\bigcup_{a \in A_0} \{v \mid h_a^\infty(v) \leq 0\})$ 意味着, $E^\infty \cap \{v \mid h_{a_0}^\infty(v) \leq 0\} = \{v \in E^\infty \mid h_{a_0}^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$ 矛盾。

命题 4 在假设 (H_1) 下考虑问题 (P) , 若 E 满足假设 (H_0) , 则 E_w 非空弱紧, 当且仅当, 任给 $a \in A_0, \arg \min_E h_a$ 非空弱紧。

证明 “ \Leftarrow ”: 任取 $a \in A_0$, 因 $\arg \min_E h_a \subseteq E_w$, 所以 E_w 非空。设 $y_n \in E_w$ 且 $y_n \xrightarrow{w} y_0$, 则存在 $a_0 \in A_0$ 使得 $h_{a_0}(y_n) \leq h_{a_0}(y), \forall y \in E$, 因为 h_{a_0} 是 $w. l. s. c.$ 的, 则当 n 充分大时,

$$h_{a_0}(y_0) \leq \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{a_0}(y_n)} \leq h_{a_0}(y)$$

即 $y_0 \in E_w$, 故 E_w 弱闭。下面证明 E_w 有界。倘若 E_w 无界, 则存在 $\{x_n\} \subseteq E_w$ 使得 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 从而 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 有界, 则 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 存在弱收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} d$, 则 $d \neq 0$, 因为 $x_n \in E_w$, 则存在 $a_1 \in A_0$ 使得 $h_{a_1}(x_n) \leq h_{a_1}(y), \forall y \in E$, 由 h_{a_1} 凸知, $\forall \lambda > 0$ 及 $y \in E$ 有

$$h_{a_1}(\frac{\lambda}{\|x_n\|}x_n + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})y) \leq$$

$$\frac{\lambda}{\|x_n\|}h_{a_1}(x_n) + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})h_{a_1}(y) \leq$$

$$\frac{\lambda}{\|x_n\|}h_{a_1}(y) + (1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|})h_{a_1}(y) = h_{a_1}(y)$$

又 h_{a_1} 弱 $l. s. c.$, 则当 n 充分大时, 由 $h_{a_1}(\lambda d + y) \leq h_{a_1}(y), \forall \lambda > 0, y \in E$ 可知 $h_{a_1}^\infty(d) \leq 0$, 显然 $d \in E^\infty$, 故 $0 \neq d \in \{v \in E^\infty \mid h_{a_1}^\infty(v) \leq 0\}$, 因为 $\forall a \in A_0, \arg \min_E h_a$ 弱紧, 从而有界, 所以

$$(\arg \min_E h_{a_1})^\infty = \{x \in E \mid h_{a_1}(x) \leq$$

$$h_{a_1}(y), \forall y \in E\}^\infty = \{v \in E^\infty \mid h_{a_1}^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$$

矛盾。所以 E_w 有界, 从而弱紧。

“ \Rightarrow ”: 设 E_w 非空弱紧。倘若存在某个 $a_0 \in A_0$ 使得 $\arg \min_E h_{a_0} = \emptyset$, 取 $x_0 \in \arg \min_E h_{a_0}(x)$ 及 $\bar{x} \in E$ 使得 $h_{a_0}(\bar{x}) < h_{a_0}(x_0)$, 由引理 2 知, $N(\bar{x}) = \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(\bar{x}), \forall a \in A_0\}$ 非空弱紧。因为 $h_a(x)$ 在 E 上 $w. l. s. c.$, 所以 $h_a(x)$ 在 $N(\bar{x})$ 上一定有极小值, 即 $\exists \bar{x}_0 \in N(\bar{x})$, 使得 $h_a(\bar{x}_0) \leq h_a(x), \forall x \in N(\bar{x})$, 显然 $\bar{x}_0 \in E_w$, 所以 $h_{a_0}(\bar{x}_0) \leq h_{a_0}(\bar{x}) < h_{a_0}(x_0)$, 这与 $x_0 \in \arg \min_E h_{a_0}(x)$ 矛盾。故 $\forall a \in A_0, \arg \min_E h_a(x)$ 非空。另外, 由 $\arg \min_E h_a \subseteq E_w$ 知其有界, 由 $h_a(x)$ 的弱下半连续性知 $\arg \min_E h_a$ 弱闭, 从而弱紧。

命题 5 在假设 (H_1) 下考虑问题 (P) , 若 E 满足假设 (H_0) , 则任给 $a \in A_0, \arg \min_E h_a$ 是非空弱紧集, 当且仅当, 对 $\forall a \in A_0, h_a(x)$ 在 E 上是 0 -强制的。

证明 “ \Rightarrow ”: 倘若对某个 $a_0 \in A_0, h_{a_0}(x)$ 在 E 上不是 0 -强制的。则 $\exists x_n \in E$ 及常数 $M > 0$, 当 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 时, $h_{a_0}(x_n) \leq M$, 所以 $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 有界, 则

$\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ 存在弱收敛的子列, 不失一般性, 设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} d$, 由 E 弱回收紧得 $d \neq 0$, 由 h_{a_0} 凸及弱下半连续性知, $h_{a_0}^\infty(d) \leq 0$, 从而 $0 \neq d \in \{v \in E^\infty \mid h_{a_0}^\infty(v) \leq 0\}$ 导出矛盾。

“ \Leftarrow ”: 对于给定的 $x_0 \in E$, 由 $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} h_a(x) = +\infty$ 知, 存在 $r > 0$ 使得当 $\|x\| > r$ 时, $h_a(x) > h_a(x_0)$, 令 $B_r = \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$, 则 B_r 弱紧, 从而 $h_a(x)$ 在 B_r 上一定有极小值, 即存在 $x_1 \in B_r$ 使得 $h_a(x_1) \leq h_a(x), \forall x \in B_r$, 从而 $h_a(x_1) \leq h_a(x), \forall x \in X$, 即 $x_1 \in \arg \min_E h_a(x), \forall a \in A_0$, 设 $z_n \in \arg \min_E h_a(x)$ 且 $z_n \xrightarrow{w} z_0$, 则 $h_a(z_n) \leq h_a(y), \forall y \in E$, 由 h_a 的弱下半连续性得 $z_0 \in \arg \min_E h_a(x), \forall a \in A_0$ 。倘若对某个 $a_0 \in A_0, \arg \min_E h_{a_0}(x)$ 无界。则 $x_n \in \arg \min_E h_{a_0}(x)$ 并且 $\|x_n\| \rightarrow +\infty$

$(n \rightarrow +\infty)$, 从而 $\lim_{\|x_n\| \rightarrow +\infty} h_{a_0}(x_n) = +\infty$ 与 $x_n \in \arg \min_E h_{a_0}(x)$ 矛盾。因此 $\forall a \in A_0, \arg \min_E h_a(x)$, 非空弱紧。

定理 1 在假设 (H_1) 下考虑问题 (P) , 若 E 满足假设 (H_0) , 则下述等价

- (1) E_w 非空弱紧。
- (2) $\forall a \in A_0, \arg \min_E h_a$ 非空弱紧。
- (3) $\forall a \in A_0, h_a(x)$ 在 E 上是 0 - 强制的。
- (4) $\bigcup_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$ 。
- (5) $\forall e \in E, N(e) = \bigcap_{a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e)\}$

非空弱紧。

(6) 对某个 $e_0 \in E, N(e_0) = \bigcap_{a \in A_0} \{x \in E \mid h_a(x) \leq h_a(e_0)\}$ 非空弱紧。

证明 (1) \Leftrightarrow (2): 命题 4; (2) \Leftrightarrow (3): 命题 5; (2) \Rightarrow (4): 对 $\forall a \in A_0$, 因为 $\arg \min_E h_a$ 非空弱紧, 则

$$(\arg \min_E h_a)^\infty = \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$$

所以, $\bigcup_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$ 。(4) \Rightarrow (2): 命题 3; (1) \Rightarrow (5) 命题 2; (6) \Rightarrow (4) 同 (5) \Rightarrow (4); 因此我们只需证明 (5) \Rightarrow (4) 即可。对 $\forall e \in E$, 由 $N(e)$ 非空弱紧得,

$$\begin{aligned} \{0\} &= [N(e)]^\infty = \\ &\bigcap_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} \subseteq \bigcup_{a \in A_0} \{v \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} \end{aligned}$$

倘若存在 $a_0 \in A_0$ 使得 $0 \neq d \in \{v \mid h_{a_0}^\infty(v) \leq 0\}$,

则 $d \in E^\infty$ 并且

$$h_{a_0}^\infty(v) \leq 0 \Leftrightarrow \sup_{\lambda > 0} \frac{h_{a_0}(\lambda d + e) - h_{a_0}(e)}{\lambda} \leq 0, \forall \lambda > 0, e \in E$$

矛盾。所以 $\{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$, 从而

$$\bigcup_{a \in A_0} \{v \in E^\infty \mid h_a^\infty(v) \leq 0\} = \{0\}$$

参考文献:

- [1] Deng S.Characterizations of the Nonemptiness and compactness of solution sets in convex vector optimization[J].J.Optim Theory Appl.,1998,96(1):123-131.
- [2] Deng S.Characterization of the nonemptiness and boundedness of weakly efficient solution sets of convex vector optimization problems in real reflexive banach spaces [J].J.Optim Theory Appl.,2009,140:1-7.
- [3] Flores-Bazan F.Radial epiderivatives and asymptotic functions in nonconvex vector optimization [J]. SIAM Journal on Optimization,2003,14:284-305.
- [4] Flores-Bazan F.Semistrictly quasiconvex mapping and nonconvex vector optimization[J].Mathematical Methods of Operations Research,2004,59:129-145.
- [5] Huang X X.Characterizations of nonemptiness and compactness of the set of weakly efficient solutions for convex vector optimization and applications [J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,264: 270-287.
- [6] Huang X X,Yang X Q,Teo K L.Characterizing none-mp-tiness and compactness of the solution set of a convex vector optimization problem with cone conatrains and applications [J]. J. Optim Theory Appl.,2004,123 (2): 391-407.
- [7] Flores-Bazan F,Vera C.Characterization of the nonemptiness and compactness of solution sets in convex and nonconvex vector optimization[J].J.Optim Theory Appl.,2006,130(2):185-207.
- [8] Rockafellar R T.Convex analysis[M].Princeton,New Jersey:Princeton University Press,1970.

Characterization of Solution Sets of Vector Optimization Problems in Banach Spaces

LI Liu-fen

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: In finite-dimensional spaces, when the scalar function is convex lower semi-continuity, the efficient solution sets of convex vector optimization problems is nonempty and compact, but in infinite-dimensional spaces this is not established. However under the structure of a set in dual space and the weakening objective function hypothesis, the results in real finite-dimensional space is extended to real reflexive Banach spaces.

Key words: vector optimization; weakly efficient solution; 0-coercivity; recession cone