

# 用 $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$ 证明一类级数部分和不等式

罗 静

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

**摘 要:**运用概率论中的一个不等式  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$ , 可以证明或者导出一系列级数的部分和不等式。方法的关键是要根据问题自身的特征,灵活地构造出一个适当的离散型随机变量的分布列。所用的方法具有一定的程序性和较强的可操作性。

**关键词:**随机变量;级数部分和;不等式

**中图分类号:**0172

**文献标志码:**A

## 1 引言与预备知识

离散型随机变量的方差与期望之间有一个重要的关系,通过这个关系即可得到一个简单的概率不等式。以此作工具,可以证明或者导出一系列级数部分和不等式。证明或者导出的方法并不复杂,且具有一定的程序性和较强的可操作性,其间的关键和难点是构造出一个适当的离散型随机变量的分布列。为了本文的完整性,先证明下述命题。

**定理 1** 设  $\xi$  是一个只取有限个值的离散型随机变量,其分布列为:  $P(\xi = x_i) = P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。则有  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$  (当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时取“=”号)。

**证明** 因为  $E\xi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 P_i, E\xi = \sum_{i=1}^n x_i P_i$ , 所以

$$D\xi = \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi)^2 P_i =$$

$$\sum_{i=1}^n [x_i^2 P_i - 2x_i P_i (E\xi) + (E\xi)^2 P_i] =$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 P_i - 2(E\xi) \left( \sum_{i=1}^n x_i P_i \right) + (E\xi)^2 \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) =$$

$$E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

因为  $D\xi \geq 0$ , 所以  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$  (当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时取“=”号)。

## 2 主要结果及证明

**定理 2** 设  $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \alpha, \beta \in R$ , 则  $\left( \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^\beta \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\alpha}{s}} b_i^{\frac{\beta}{s}} \right)^2$ 。

**证明** 设离散型随机变量  $\xi$  的分布列为

$$P\left(\xi = \frac{b_i^{\frac{\beta}{s}}}{a_i^{\frac{\alpha}{s}}}\right) = \frac{a_i^\alpha}{s}$$

其中

$$s = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha (i = 1, 2, \dots, n)$$

则

$$E\xi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{b_i^{\frac{\beta}{s}}}{a_i^{\frac{\alpha}{s}}} \right)^2 \frac{a_i^\alpha}{s} \right] = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n b_i^\beta, E\xi =$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i^{\frac{\beta}{s}}}{a_i^{\frac{\alpha}{s}}} \right) \left( \frac{a_i^\alpha}{s} \right) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\alpha}{s}} b_i^{\frac{\beta}{s}}$$

根据  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$  得  $\sum_{i=1}^n b_i^\beta \geq \frac{1}{s} \left( \sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\alpha}{s}} b_i^{\frac{\beta}{s}} \right)^2$ , 即:

$(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)(\sum_{i=1}^n b_i^\beta) \geq (\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\alpha}{\lambda}} b_i^{\frac{\beta}{\lambda}})^2$  (当且仅当  $b_i^\beta = \lambda a_i^\alpha, \lambda$  为常数且  $\lambda > 0$  时取“=”号)。证毕。

**推论 1** (柯西(Cauchy)不等式) 设  $a_i > 0, b_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$ ) 则  $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$  (当且仅当  $b_i = \lambda a_i, \lambda$  为常数, 且  $\lambda > 0$  时取“=”号)。

显然, 在定理 2 中取  $\alpha = \beta = 2$ , 即得此推论。

**推论 2** (均方根-算术平均不等式)<sup>[1]</sup> 设  $a_i \in R^+$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ 。

在定理 2 中取  $b_i = 1, \alpha = 2$  即得此推论。

**推论 3** 设  $a_i, b_i \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n), \alpha + \beta = 2$  且  $\alpha\beta < 0$ , 则  $(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)(\sum_{i=1}^n b_i^\beta) \geq (\sum_{i=1}^n a_i)^\alpha (\sum_{i=1}^n b_i)^\beta$ 。

由 Holder 不等式知  $\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\alpha}{\lambda}} b_i^{\frac{\beta}{\lambda}} \geq (\sum_{i=1}^n a_i)^{\frac{\alpha}{\lambda}} (\sum_{i=1}^n b_i)^{\frac{\beta}{\lambda}}$ , 代入定理 2 的右边, 即得此推论<sup>[2]</sup>。

**定理 3**<sup>[3]</sup> 设  $a_i \in (0, A) (i = 1, 2, \dots, n), \alpha \geq 1$  或  $\alpha \leq 0$  或  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 且  $\sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{2\alpha}}{A - a_i} \geq \frac{s^{2\alpha}}{(nA - s)n^{2\alpha-2}} \quad (1)$$

**证明** (i) 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 设离散型随机变量  $\xi$  的分布列为  $P(\xi = \frac{A - a_i}{A - a_i}) = \frac{A - a_i}{nA - s} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则

$$E\xi^2 = \frac{A}{nA - s} \sum_{i=1}^n \frac{A - a_i}{A - a_i} = \frac{A}{nA - s} \sum_{i=1}^n (1 + \frac{a_i}{A - a_i}) = \frac{A}{nA - s} (n + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A - a_i})$$

$$E\xi = \frac{nA}{nA - s}$$

由  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$  得:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A - a_i} \geq \frac{ns}{nA - s}$ 。此时(1)式成立。

(ii) 当  $\alpha \geq 1$  或  $\alpha \leq 0$  时, 设离散型随机变量  $\xi$  的分布列为  $P(\xi = \frac{a_i^\alpha}{A - a_i}) = \frac{A - a_i}{nA - s} (i = 1, 2, \dots, n)$  则

$$E\xi^2 = \frac{1}{nA - s} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{2\alpha}}{A - a_i}, E\xi = \frac{1}{nA - s} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha$$

由  $(E\xi)^2$  得:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{2\alpha}}{A - a_i} \geq \frac{1}{nA - s} (\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)^2 \quad (2)$$

又当  $\alpha \geq 1$  或  $\alpha \leq 0$  时, 由 Jensen 不等式得<sup>[4]</sup>:  $\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \geq \frac{1}{n^{\alpha-1}} (\sum_{i=1}^n a_i)^\alpha$ 。这里只须注意函数  $f(a_i) = a_i^\alpha$  在区间  $(0, +\infty)$  上是下凸函数, 代入(2)式得

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{2\alpha}}{A - a_i} \geq \frac{s^{2\alpha}}{(nA - s)n^{2\alpha-2}},$$

此时(1)式成立, 证毕。

**推论 4** 设  $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \alpha \geq 1$  或  $\alpha \leq 0$  或  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 且  $\sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{2\alpha}}{s - a_i} \geq \frac{s^{2\alpha-1}}{(n-1)n^{2\alpha-2}}$ 。

在(1)式中, 取  $A = s$ , 即得此推论。

**推论 5**<sup>[5]</sup> 设  $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{s - a_i} \geq \frac{s^{k-1}}{(n-1)n^{k-2}}$  (其中  $k$  为常数, 且  $k \in N^+$ )。

在(1)式中, 取  $A = s, \alpha = \frac{k}{2} (k \in N^+)$ , 即得此推论。

**推论 6**<sup>[5]</sup> 设  $0 < a_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{1 - a_i} \geq \frac{s^k}{(n-s)n^{k-2}}$  (其中  $k$  为常数, 且  $k \in N^+$ )。

在(1)式中, 取  $A = 1, \alpha = \frac{k}{2} (k \in N^+)$ , 即得此推论。

**推论 7**<sup>[6-7]</sup> 若  $a_i \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \sum_{i=1}^n a_i = s, p \in R$  且  $|p| \geq 2$ , 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^p (s - a_i)} \geq \frac{n^{p+2}}{(n-1)s^{p+1}}$$

在(1)式中, 取  $A = s, \alpha = -\frac{p}{2} (|p| \geq 2)$ , 即得此推论。

**推论 8** (Shapiro 不等式) 设  $0 < a_i < 1 (i = 1, 2,$

$\dots, n, n \geq 2$ ), 且  $\sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_i} \geq \frac{ns}{n-s}$ .

在(1)式中, 取  $A = 1, \alpha = \frac{1}{2}$  即得此推论。

**定理 4** 设  $a_i, A \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2), \alpha \geq 2$

或  $\alpha \leq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^\alpha}{A+a_i} \geq \frac{s^\alpha}{(nA+s)n^{\alpha-2}}$ .

证明同定理 3 中的 (ii)。(这里只须注意设  $\xi$  分布

列为  $P(\xi = \frac{a_i^\alpha}{A+a_i}) = \frac{A+a_i}{nA+s}$ , 过程略。

**推论 9** 设  $0 < a_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 且

$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , 则  $\frac{a_1^2}{1+a_1} + \frac{a_2^2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n^2}{1+a_n} \geq \frac{1}{n+1}$ .

在定理 4 中, 取  $A = s = 1, \alpha = 2$  即得此推论。

**定理 5** 设  $a_i, A \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 且

$\sum_{i=1}^n a_i = s$ , 则:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A+a_i} \leq \frac{ns}{nA+s}$ .

证明同定理 3 中的 (i)。(这里只须注意设  $\xi$  分布

列为  $P(\xi = \frac{A}{A+a_i}) = \frac{A+a_i}{nA+s}$ , 过程略。

**推论 10** 设  $0 < a_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 且

$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , 则  $\frac{1}{n+1} < \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \leq$

$\frac{n}{n+1}$ .

在定理 5 中取  $A = s = 1$  得右边不等式, 再由定理 4

的推论(注意  $\frac{a_i^2}{1+a_i} < \frac{a_i}{1+a_i}$ )得左边不等式, 故此推论成立。

**定理 6** 设  $a_i, b_i \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 且

$\alpha, \beta \in R$ , 则  $(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^{2\beta}) \geq (\sum_{i=1}^n a_i^\alpha b_i^\beta)^2$ .

证明同定理 2(这里只须注意设  $\xi$  分布列为  $P(\xi =$

$\frac{b_i^\beta}{s}) = \frac{a_i^\alpha}{s}, \sum_{i=1}^n a_i^\alpha = s$ , 过程略。

**推论 11** 设  $a_i \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 且  $\alpha、$

$\beta \in R$ , 则  $(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha)(\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha+2\beta}) \geq (\sum_{i=1}^n a_i^{\alpha+\beta})^2$ .

在定理 6 中取  $b_i = a_i$ , 即得此推论。

**推论 12**<sup>[8]</sup> (吴振奎不等式)若  $a_i \in R^+ (i = 1, 2,$

$\dots, n), p, q \in R$ , 则  $(\sum_{i=1}^n a_i^p)(\sum_{i=1}^n a_i^q) \geq (\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{p+q}{2}})^2$ .

在定理 6 中取  $b_i = a_i, \alpha = p, \beta = \frac{q-p}{2}$ , 即得此推

论。

**推论 13**<sup>[9]</sup> (算术平均-调和平均不等式的指数推

广)设  $a_i \in R^+ (i = 1, 2, \dots, n), \alpha \in R$ , 则  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \geq$

$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^\alpha}}$ .

在定理 6 中取  $b_i = a_i, \beta = -\alpha$ , 即得此推论。

**定理 7** 设  $a_1 > a_2 > \dots > a_n \in R$ , 又  $b_i \in R (i =$

$1, 2, \dots, n)$ , 且  $\alpha \geq 1$  或  $\alpha \leq 0, \sum_{i=1}^n b_i = T$ , 则  $\frac{b_i^{2\alpha}}{a_i - a_{i+1}} \geq$

$\frac{T^{2\alpha}}{(a_1 - a_{n+1})n^{2\alpha-2}}$ .

证明同定理 3 中的 (ii) (这里只须注意: 设  $\xi$  分布

列为  $P(\xi = \frac{b_i^\alpha}{a_i - a_{i+1}}) = \frac{a_i - a_{i+1}}{a_1 - a_{n+1}}$ , 过程略。

**推论 14** 设  $a_i \in R (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且  $a_1 > a_2 >$

$\dots > a_n$ , 则  $\frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} - a_n} +$

$\frac{(n-1)^2}{a_n - a_1} \geq 0$ .

**证明** 在定理 7 中令  $b_i = \alpha = 1$ , 则  $T = \sum_{i=1}^{n-1} b_i = n$

$- 1$ , 所以,  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i - a_{i+1}} \geq \frac{(n-1)^2}{a_1 - a_n}$ , 移项可知推论 14

成立。

**推论 15**<sup>[10]</sup> 设  $a_1 > a_2 > \dots > a_n \in R$ , 又  $b_i \in R$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ , 则

$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{a_i - a_{i+1}} + \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1})^2}{a_n - a_1} \geq 0$

在定理 7 中取  $\alpha = 1$ , 即得此推论。

### 3 结束语

本文命题证明的关键是要根据题目自身的特征, 灵活地构造出一个适当的分布列。对于所得结论中的各量取不同的值可得一大批级数部分和不等式。

## 参考文献:

- [1] 陈文灯,黄先开,曹显兵.考研数学复习指南[M].北京:世界图书出版公司,2007.
- [2] 李调惠.一类不等式的证明[J].数学通报,2000(8):31.
- [3] 隆建军.Shapiro 不等式的指数推广[J].佳木斯大学学报:自然科学版,2012(1):121-122.
- [4] 匡继昌.常用不等式[M].济南:山东科学技术出版社,2004.
- [5] 季明银.一类不等式的推广[J].数学通报,2008(1):60-61.
- [6] 罗邦华.≤数学通报≥1624号问题的两个别证及再推广[J].数学通报,2008(5):50.
- [7] 李长明,周焕山.初等数学研究[M].北京:高等教育出版社,1995.
- [8] 吴振奎.数学的创造[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.
- [9] 华东师范大学数学系.数学分析[M].4版.北京:高等教育出版社,2010.
- [10] 吴振奎.数学的创造[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.

Proof of a Series of Partial Sum Inequality with  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$ 

LUO Jing

(School of Science, Sichuan University of Science &amp; Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract:** By the theory of probability of an inequality  $E\xi^2 \geq (E\xi)^2$ , a series of the series and inequality can be proved or derived. The key to the problem is according to its own characteristics to flexibly construct a proper discreted random variable distribution. The method has a certain procedural and stronger maneuverability.

**Key words:** random variables; partial sum; inequality