

# 一类二阶矩阵微分方程的特解

吴幼明<sup>1</sup>, 吴文峰<sup>2</sup>

(1. 佛山科学技术学院理学院, 广东 佛山 528000; 2. 五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门 529020)

**摘要:**基于微分方程组理论和矩阵理论,采用按列比较方法和待定矩阵方法,给出了非齐次项为二次多项式与指数函数乘积的一类三维二阶常系数线性微分方程组的特解公式。对特殊情况进行了讨论,并通过算例验证了微分方程组特解公式的正确性。为高阶微分方程组的解法研究提供了一条有效的途径。

**关键词:**微分方程组;待定矩阵法;按列比较法

**中图分类号:**O241.8

**文献标志码:**A

求常系数线性微分方程组的特解<sup>[1-6]</sup>是微分方程理论的重要内容之一,而对于高阶微分方程组的特解研究,目前研究结果还很少。根据线性非齐次微分方程组解的结构定理,线性非齐次微分方程组的通解等于对应的齐次方程组的通解加上非齐次微分方程组的一个特解。对于常系数线性微分方程组来说,当非齐次项为某些特殊形式时,可用待定矩阵法<sup>[4-6]</sup>求出非齐次微分方程组的一个特解。文献[7]给出了一类二阶常系数微分方程组的通解公式,但其非齐次项仅为二次多项式的形式;文献[4-6]分别给出了文献[7]的微分方程组在非齐次项为二次多项式与指数函数相乘等三种形式的特解公式。文献[8]在文献[7]的基础上得到了一类含一阶导数项的三维二阶常系数微分方程组的通解公式,但其非齐次项亦仅为二次多项式的情形。本文在文献[4-8]的基础上,采用待定矩阵法和按列比较法,给出了文献[8]的微分方程组在非齐次项为二次多项式与指数函数相乘形式的特解公式,是文献[8]的推广,因此更具有一般性。

## 1 符号

矩阵微分方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $f_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  是关于  $x$  的函数,  $t_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  是关于  $x$  的二次多项式与指数函数的乘积,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 是常数。

记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

并假设  $A$  可逆,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

收稿日期:2012-10-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11126340);佛山科学技术学院创新团队项目(09X001)

作者简介:吴幼明(1962-)男,广州人,副教授,博士,主要从事力学与应用数学方面的研究,(E-mail) wuyouming@fosu.edu.cn

因此,式(1)整理后为

$$\begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 2 方程的通解

### 2.1 齐次方程的通解

方程(2)对应的齐次方程为:

$$\begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

则方程(3)的通解<sup>[8]</sup>为:

$$f = [f_1 f_2 f_3]^T = V[\exp(\Lambda x)C'_1 + \exp(-\Lambda^{-1}x)C'_2]$$

其中,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5)$ , 而

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\bar{\lambda}_1 + \sqrt{\bar{\lambda}_1 + 4})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(-\bar{\lambda}_2 + \sqrt{\bar{\lambda}_2 + 4})$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(-\bar{\lambda}_3 + \sqrt{\bar{\lambda}_3 + 4})$$

而  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$  是矩阵  $C$  的三个特征根;  $V$  是矩阵  $C$  的列特征向量的矩阵;  $C'_1, C'_2$  是常数向量。

### 2.2 非齐次方程的特解

对方程(2)设

$$t(x) = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1x^2 + m_1x + n_1)e^{r_1x} \\ (l_2x^2 + m_2x + n_2)e^{r_2x} \\ (l_3x^2 + m_3x + n_3)e^{r_3x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $l_i, m_i, n_i, r_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是常数。根据待定矩阵法,可设方程(2)的1个特解为:

$$f_i = (Gx^2 + Hx + J) \begin{bmatrix} e^{r_1x} \\ e^{r_2x} \\ e^{r_3x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中,

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix}$$

而  $g_{ik}, h_{ik}, j_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) 是常数。

将式(5)代入方程(2),整理并比较  $x$  的同次幂系数和指数函数的系数,得

$$G \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{bmatrix} - CG \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} - G = A^{-1} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$4G \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{bmatrix} - 2CG - CH \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} - H = A^{-1} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$2G + 2H \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{bmatrix} - CH - CJ \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} - J = A^{-1} \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式(6)分别取第1、2和3列比较得:

$$\begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

有

$$G = [(S_1)_1, (S_2)_2, (S_3)_3] \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由式(7)分别取第1、2和3列比较得:

$$\begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} m_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2R_i(2r_iE_3 - C) \begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

将式(9)代入式(11)有

$$H = [(S_1)_1, (S_2)_2, (S_3)_3] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} - 2[(\Phi_1)_1, (\Phi_2)_2, (\Phi_3)_3] \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

由式(8)分别取第 1、2 和 3 列比较得:

$$\begin{bmatrix} j_{1i} \\ j_{2i} \\ j_{3i} \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} n_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2R_i \begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} - R_i(2r_i E_3 - C) \begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

将式(9)和式(11)代入式(13)得到

$$\begin{aligned} J = & [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} - \\ & [(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} + \\ & 2[(U_1)_1 - (R_1 S_1)_1 (U_2)_2 - (R_2 S_2)_2 (U_3)_3 - \\ & (R_3 S_3)_3] \times \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_i &= [(r_i^2 - 1)E_3 - r_i C]^{-1}; S_i = R_i A^{-1}; \\ \Phi_i &= R_i(2r_i E_3 - C)S_i; \\ U_i &= R_i(2r_i E_3 - C)\Phi_i \quad (i = 1, 2, 3), E_3 \text{ 为三阶单位} \\ &\text{矩阵。} (S_i)_i, (\Phi_i)_i, (R_i S_i)_i, (U_i)_i \text{ 分别为 } S_i, \Phi_i, R_i S_i, \\ &U_i \text{ 的第 } i \text{ 列 } (i = 1, 2, 3)。 \end{aligned}$$

将所求得的  $G, H, J$  的值代入式(5),得方程(2)的 1 个特解为:

$$\begin{aligned} f_i = & [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} (l_1 x^2 + m_1 x + n_1)e^{r_1 x} \\ (l_2 x^2 + m_2 x + n_2)e^{r_2 x} \\ (l_3 x^2 + m_3 x + n_3)e^{r_3 x} \end{bmatrix} - \\ & [(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3] \begin{bmatrix} (2l_1 x + m_1)e^{r_1 x} \\ (2l_2 x + m_2)e^{r_2 x} \\ (2l_3 x + m_3)e^{r_3 x} \end{bmatrix} + \\ & [(U_1)_1 - (R_1 S_1)_1 (U_2)_2 - (R_2 S_2)_2 (U_3)_3 - \\ & (R_3 S_3)_3] \times \begin{bmatrix} 2l_1 e^{r_1 x} \\ 2l_2 e^{r_2 x} \\ 2l_3 e^{r_3 x} \end{bmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

从而方程(2)的通解为:

$$f = V[\exp(\Lambda x)C'_1 + \exp(-\Lambda^{-1}x)C'_2] + f_i \quad (16)$$

### 2.3 特殊情况讨论

对于所求得的特解公式(15)式,当  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  时,此时方程组的特解为:

$$f_i = -A^{-1}t(x) + A^{-1}BA^{-1}t'(x) -$$

$$(A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + A^{-1})t''(x) \quad (17)$$

此结果与文献[8]的结论完全一致,证明本文的特解公式是文献[8]的拓展。

### 3 算例

用本文方法解下列方程组的一个特解

$$\begin{cases} x'' - x' + y' + z' - x = -e^{2t} \\ y'' + x' - y' + z' - y = te^t \\ z'' + x' + y' - z' - z = t^2 e^{-t} \end{cases} \quad (18)$$

解 将方程组(18)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ te^t \\ t^2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = B$$

$$l_1 = m_1 = l_2 = n_2 = m_3 = n_3 = 0$$

$$m_2 = r_2 = l_3 = 1, n_1 = r_3 = -1, r_1 = 2$$

则

$$R_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = -R_2, S_i = R_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = -E_3$$

$$U_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -13 & 7 & 7 \\ 7 & -13 & 7 \\ 7 & 7 & -13 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = 3\Phi_2$$

$$U_3 = B$$

$$R_1 S_1 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 17 & -8 & -8 \\ -8 & 17 & -8 \\ -8 & -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_2 S_2 = R_3 S_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

则方程组(18)的一个特解为:

$$f_i = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ te^t \\ t^2 e^{-t} \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 2te^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -328 & 275 & -125 \\ 172 & 250 & -125 \\ 172 & 275 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \left(\frac{1}{2}t - 1\right)e^t - \frac{1}{2}(t^2 + 5)e^{-t} \\ y(t) = -\frac{2}{5}e^{2t} - e^t - \frac{1}{2}(t^2 + 5)e^{-t} \\ z(t) = -\frac{2}{5}e^{2t} + \left(\frac{1}{2}t - 1\right)e^t + (2t + 1)e^{-t} \end{cases} \quad (19)$$

经检验,式(19)确是方程组(18)的一个特解。

#### 4 结论

(1)本文采用待定矩阵法和按列比较法,在文献[4-8]的基础上,得到文献[8]中微分方程组在非齐次项

为二次多项式与指数函数相乘的形式的特解公式,并通过算例验证了其特解公式的正确性。本文结果也可通过编写计算机程序进行计算。

(2)由特殊情况的讨论知道,本文结果是文献[8]的推广。但还有很多工作有待进一步研究,如文献[8]方程的非齐次项取三角函数相乘其他形式时的特解还未见报导。

#### 参考文献:

- [1] 化存才.常系数非齐次线性微分方程组特解公式的新推导及其应用[J].云南师范大学学报,2004,24(4):1-5.
- [2] 孙丽强.几种常系数线性非齐次方程组的特解的求法[J].青岛大学师范学院学报,1997,14(2):12-16.
- [3] 吴幼明,冯宝仪.二阶线性微分方程组解法研究[J].大学数学,2011,27(4):171-175.
- [4] 吴幼明,何小媚.一类常系数微分方程组的通解[J].四川理工学院学报:自然科学版,2006,19(2):68-71.
- [5] 吴幼明,孔碧洁,何小媚.一类二阶常微分方程组的特解公式[J].佛山科学技术学院学报:自然科学版,2006,24(4):7-11.
- [6] 吴幼明,孔碧洁.一类二阶常微分方程组特解形式的探讨[J].四川理工学院学报:自然科学版,2007,20(1):20-25.
- [7] 吴幼明,罗旗帜.一类二阶常系数微分方程组的通解[J].佛山科学技术学院学报:自然科学版,2002,20(2):10-14.
- [8] 吴幼明,卢永全,杜焕芬.一类二阶常微分方程组的通解[J].佛山科学技术学院学报:自然科学版,2009,27(5):18-22.

### Particular Solutions to One Kind of Second Order Matrix Differential Equation

WU You-ming<sup>1</sup>, WU Wen-feng<sup>2</sup>

(1. School of Science, Foshan University, Foshan 528000, China; 2. School of Mathematics and Computation Science, Wuyi University, Jiangmen 529020, China)

**Abstract:** Based on differential equations theory and matrix theory, and by the method of column comparison and undetermined matrix, the particular solution of a kind of three-dimensional second order differential equations with constant coefficients is obtained. And the non-homogeneous terms of differential equations are the form of quadratic polynomial multiplied by exponential function. The special cases are discussed in detail. For example, the particular solution formulas are validated. The research results have provided a foundation for the study of the method of solving on differential equations.

**Key words:** differential equations; method of undetermined matrix; method of column comparison