第 24 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 24 No. 6
2011 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0729-04

M-矩阵与 M-矩阵的逆的 Hadamard 积的最小特征值下界的估计

周 平,赵 慧

(云南大学数学与统计学院,昆明 650091)

摘 要:给出了非奇异 M-矩阵 A 的逆矩阵与非奇异 M-矩阵 B 的 Hadamard 积的最小特征值下界的估计式,该估计式只依赖于矩阵 A 与 B 的元素,易于计算,算例表明,所得估计式在一定条件下比现有估计式更为精确。

关键词:M-矩阵; Hadamard 积; 最小特征值; 下界; 对角占优

中图分类号:O151.21 文献标识码:A

1 预备知识

用 N 表示集合 $\{1,2,\ldots n\}$,$C^{n\times n}$($R^{n\times n}$)表示 $n\times n$ 阶复(实)矩阵所成的集合。

$q(A)$ 表示 A 的最小特征值。

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,若 $a_{ij}\geqslant 0;i,j\in N$,则称 A 为非负矩阵,记为 $A\geqslant 0$;若 $a_{ij}>0;i,j\in N$,则称 A 为正矩阵,记为 $A>0$。设 $Z_n\subset R^{n\times n}$ 表示非对角元非正的 $n\times n$ 实矩阵的集合。

若 $A=(a_{ij})\in Z_n$ 可表示为 $A=sI-P$,其中 $P\geqslant 0$,$s\geqslant\rho(P)$,则称 A 为 M-矩阵。特别地,当 $s=\rho(P)$ 时,称 A 为奇异 M-矩阵;当 $s>\rho(P)$ 时,称 A 为非奇异 M-矩阵。记所有 $n\times n$ 阶非奇异 M-矩阵所成之集为 M_n。

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,如果任取 $i\in N$,$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为行对角占优的,若果 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称 A 为行严格对角占优的;如果任取 $i\in N$,$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$,则称 A 为列对角占优的,如果 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$,则称 A 为列严格对角占优的。

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,既是(严格)行对角占优又是(严格)列对角占优阵,则称 A 为(严格)双对角占优阵。

设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,$B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$,用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阵,即

$$A\circ B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \ldots & a_{1n}b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}b & \ldots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

称其为 A 和 B 的 Hadamard 积。

若 A,B 是块广义双对角占优矩阵,则 $A\circ B$ 是块广义双对角占优矩阵。若 $A,B\in R^{n\times n}$ 都为 - 矩阵,则 $A\circ B^{-1}$ 为 M -矩阵。

本文讨论 $q(B\circ A^{-1})$ 的下界. 1991 年,R. A. Horn 等在文献 [4] 中给出如下结果:

2008 年,Huang Rong 在文献 [5] 中给出如下结果:

在上述两估计式中,或涉及到矩阵和的迭代矩阵和的谱半径,或涉及到矩阵和的最小特征值,当矩阵的阶数较大时这是难以计算的。

2010 年,Li Yaotang 等在文献 [6] 中给出如下结果:

$$q(B\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{b_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}|b_{ji}|}{a_{ii}}\right\}$$

本文将给出的一个也只涉及矩阵与的元素的一个新下界,并且这个界改进了文献 [4],文献 [5],文献 [6] 的相应结果。

首先,为了叙述方便,先引入以下定义及符号。

收稿日期:2011-11-10
作者简介:周 平(1987-),女,云南大理人,硕士生,主要从事矩阵理论方面的研究,(E-mail)yunpzjy@126.com

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$。若 A 可逆,记 $A^{-1}=(\beta_{ij})$

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|,r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum_{k\neq l,i}|a_{lk}|}$$

$$l\neq ir_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\},i\in N$$

$$c_{il}=\frac{|a_{il}|}{|a_{ll}|-\sum_{k\neq l,i}|a_{kl}|},l\neq i,c_i=\max_{l\neq i}\{c_{il}\}$$

$$i\in Nm_{ik}=\frac{|a_{ik}|+\sum_{l\neq k,i}|a_{lk}|c_i}{a_{kk}}$$

$$h_{kj}=\frac{|a_{kj}|+\sum_{l\neq k,j}|a_{kl}|r_j}{a_{kk}}$$

设 $|b_{i_1j}\beta_{i_1j}|\geqslant|b_{i_2j}\beta_{i_2j}|\geqslant\ldots\geqslant|b_{i_{n-1}j}\beta_{i_{n-1}j}|$,$i_t\neq j,j\in N$;$t=1,2,\ldots,n-1$。

2 非奇异 M -矩阵 A 的逆矩阵和非奇异 M -矩阵 B 的 Hadamard 积的最小特征值的下界的估计

本节给出的一个新的下界估计式。首先,给出一些关于特征值包含域的引理。

引理 1[7] 若 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$r$ 为整数且 $1\leqslant r\leqslant n$,则的任意特征值或位于

$$\Gamma_1:\bigcup_{j\in N}\{z:|z-a_{jj}|\leqslant S_j^{(r-1)}\}$$

中,其中表示矩阵中第列的个非对角元最大模的和;或位于

$$\Gamma_2:\bigcup_{P\subseteq N\,|P|=r}\{z:\sum_{i\in P}|z-a_{ii}|\}\leqslant\sum_{i\in P}R_i$$

中,其中 $P\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$,$|P|=r$。

注 1 由引理 1 知,当时,$\Gamma_1=\{a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}\}$,$\Gamma_2$ 就是著名的 Gerschgorin 圆盘定理,此时 A 的特征值包含于 Γ_2 中;当时,的特征值或包含于 Γ_1 中或包含于 Γ_2 中。

引理 2[8] (a) 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是一个严格行对角占优矩阵,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,并且

$$\beta_{ji}\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{a_{jj}}\beta_{ii},i,j\in N,j\neq i$$

(b) 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是一个严格列对角占优矩阵,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在,并且 $\beta_{ij}\leqslant\dfrac{|a_{ij}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{kj}|c_i}{a_{jj}}\beta_{ii}$,$i,j\in N,j\neq i$。

引理 3[8] 若是一个严格行对角占优 -矩阵,则 $A^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在且有

$$\beta_{ii}\geqslant\frac{1}{a_{ii}},i\in N$$

下面我们给出的一个也只涉及矩阵与的元素的一个新的估计式。

定理 1 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为双严格对角占优 M -矩阵,$B=(b_{ij})\in M_n$,$A^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$q(B\circ A^{-1})\geqslant\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\min\left\{\min_j\left[\frac{b_{jj}-\sum_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj}|h_{ij}}{a_{jj}}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\min_{P\subseteq N\,|P|=r}\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\frac{b_{ii}-\sum_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ik}}{a_{ii}}\right]\right\}\right\}$$

其中 $P\subseteq N$,$|P|=r$,$r=1,2,\ldots,n$。

证明 令 $\lambda=q(B\circ A^{-1})$。

(ⅰ) 当 $r=1$ 时,由引理 1 及注 1 知,$\lambda\in\Gamma_2$,即存在某个 $i_0\in N$,使得

$$|\lambda-b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}|\leqslant\sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}\beta_{i_0k}|$$

故

$$\lambda\geqslant b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}-\sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}\beta_{i_0k}|\tag{1}$$

由引理 2(b),则(1)式有

$$\lambda\geqslant b_{i_0i_0}\beta_{i_0i_0}-\sum|b_{i_0k}|\frac{|a_{i_0k}|+\sum_{l\neq k,i_0}|a_{lk}|c_{i_0}}{a_{kk}}\beta_{i_0i_0}\tag{2}$$

由引理 3,则(2)式有

$$\lambda\geqslant b_{i_0i_0}\frac{1}{a_{i_0i_0}}-\sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}|\frac{|a_{i_0k}|+\sum_{l\neq k,i_0}|a_{lk}|c_{i_0}}{a_{kk}}\frac{1}{a_{i_0i_0}}=$$

$$(b_{i_0i_0}-\sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}|m_{i_0k})\frac{1}{a_{i_0i_0}}$$

即

$$\lambda\geqslant\min_i\left\{\frac{b_{ii}-\sum_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ik}}{a_{ii}}\right\},i\in N\tag{3}$$

(ⅱ) 当 $r\in N\backslash\{1,n\}$ 时,由引理 1 及注 1 知,或者 $\lambda\in\Gamma_1$,即存在某个 $j_0\in N$,使得

$$|\lambda-b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}|\leqslant S_{j_0}^{(r-1)},\lambda\geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}-S_{j_0}^{(r-1)}=$$

$$b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}-(|b_{i_1j_0}\beta_{i_1j_0}|+|b_{i_2j_0}\beta_{i_2j_0}|+\ldots+|b_{i_{r-1}j_0}\beta_{i_{r-1}j_0}|)\tag{4}$$

由引理 2(a) 和(4)式,得

$$\lambda\geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}-|b_{i_1j_0}|\frac{|a_{i_1j_0}|+\sum_{k\neq j_0,i_1}|a_{kj_0}|r_{i_1}}{a_{j_0j_0}}\beta_{j_0j_0}-$$

$$|b_{i_2j_0}|\frac{|a_{i_2j_0}|+\sum_{k\neq j_0,i_2}|a_{kj_0}|r_{i_2}}{a_{j_0j_0}}\beta_{j_0j_0}-\ldots\ldots-$$

$$|b_{i_{r-1}j_0}|\frac{|a_{i_{r-1}j_0}|+\sum_{k\neq j_0,i_{r-1}}|a_{kj_0}|r_{i_{r-1}}}{a_{j_0j_0}}\beta_{j_0j_0}$$

$$=b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}-\beta_{j_0j_0}\sum_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj_0}|\frac{|a_{i_tj_0}|+\sum_{k\neq j_0,i_t}|a_{kj_0}|r_{i_t}}{a_{j_0j_0}}\tag{5}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由引理 3 和 (5) 式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{a_{j_0j_0}}\left(b_{j_0j_0} - \sum_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj_0}|\frac{|a_{i_tj_0}| + \sum\limits_{k\neq j_0,i_t}|a_{kj_0}|r_{i_t}}{a_{j_0j_0}}\right) = \frac{b_{j_0j_0} - \sum\limits_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj_0}|h_{i_tj_0}}{a_{j_0j_0}}$$

即

$$\lambda \geqslant \min_j\left\{\frac{b_{jj} - \sum\limits_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj}|h_{i_tj}}{a_{jj}}\right\}, j \in N \qquad (6)$$

或者 $\lambda \in \Gamma_2$, 即存在某个 $P_0 \subseteq N$, $|P| = r$, 使得

$$\sum_{i\in P_0}|\lambda - b_{ii}\beta_{ii}| \leqslant \sum_{i\in P_0}\left(\sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}\beta_{i_0k}|\right)$$

故

$$\lambda \geqslant \frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P_0}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k\neq i_0}|b_{i_0k}\beta_{i_0k}|\right)\right] \qquad (7)$$

由引理 2(b) 和 (7) 式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k\neq i}|b_{ik}|\frac{|a_{ik}| + \sum\limits_{l\neq k,i}|a_{lk}|c_i}{a_{kk}}\beta_{ii}\right)\right] \qquad (8)$$

由引理 3 和 (8) 式,得

$$\lambda \geqslant \min_{P\subseteq N\,|\,P|=r}\left\{\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in p}\frac{b_{ii} - \sum\limits_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ik}}{a_{ii}}\right]\right\}, i \in N \qquad (9)$$

(ⅲ) 当 $r = n$ 时,由引理 1 及注 1 知,或者 $\lambda \in \Gamma_1$, 即存在某个 $j_0 \in N$, 使得

$$|\lambda - b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0}| \leqslant S_{j_0}^{(r-1)}\ \lambda \geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - S_{j_0}^{(n-1)} = b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - (|b_{i_1j_0}\beta_{i_1j_0}| + |b_{i_2j_0}\beta_{i_2j_0}| + \dots + |b_{i_{n-1}j_0}\beta_{i_{n-1}j_0}|) \qquad (10)$$

由引理 2(a) 和 (10) 式,得

$$\lambda \geqslant b_{j_0j_0}\beta_{j_0j_0} - \beta_{j_0j_0}\sum_{t=1}^{n-1}|b_{i_tj_0}|\frac{|a_{i_tj_0}| + \sum\limits_{k\neq j_0,i_t}|a_{kj_0}|r_{i_t}}{a_{j_0j_0}} \qquad (11)$$

由引理 3 和 (11) 式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{a_{j_0j_0}}\left(b_{j_0j_0} - \sum_{t=1}^{n-1}|b_{i_tj_0}|\frac{|a_{i_tj_0}| + \sum\limits_{k\neq j_0,i_t}|a_{kj_0}|r_{i_t}}{a_{j_0j_0}}\right) = \frac{b_{j_0j_0} - \sum\limits_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj_0}|h_{i_tj_0}}{a_{j_0j_0}}$$

即

$$\lambda \geqslant \min_j\left\{\frac{b_{jj} - \sum\limits_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj}|h_{i_tj}}{a_{jj}}\right\}, j \in N \qquad (12)$$

或者 $\lambda \in \Gamma_2$, 即存在 $1,2,\dots,n \in N$, 使得

$$|\lambda - b_{11}\beta_{11}| + |\lambda - b_{22}\beta_{22}| + \dots + |\lambda - b_{nn}\beta_{nn}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k\neq i}|b_{ik}\beta_{ik}|\right)$$

故

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k\neq i}|b_{ik}\beta_{ik}|\right)\right] \qquad (13)$$

由引理 2(b) 和 (13) 式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ii}\beta_{ii} - \sum_{k\neq i}|b_{ik}|\frac{|a_{ik}| + \sum\limits_{l\neq k,i}|a_{lk}|c_i}{a_{kk}}\beta_{ii}\right)\right] \qquad (14)$$

由引理 3 和 (14) 式,得

$$\lambda \geqslant \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}}\left(b_{ii} - \sum_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ik}\right)\right]\right\} \qquad (15)$$

由(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)知

$$q(B\circ A^{-1}) \geqslant \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\min\left\{\min_j\left[\frac{b_{jj} - \sum\limits_{t=1}^{r-1}|b_{i_tj}|h_{i_tj}}{a_{jj}}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.\min_{P\subseteq N\,|\,P|=r}\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\frac{b_{ii} - \sum\limits_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ik}}{a_{ii}}\right]\right\}\right\}$$

其中 $P \subseteq N$, $|P| = r$, $r = 1,2,\dots,n$。

例 1　令 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

由文献 [4] 中定理,得 $q(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.0268$。

由文献 [5] 中定理,得 $q(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.0555$。

由文献 [6] 中定理 2.1,得 $q(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.0714$。

应用本文的定理,得 $q(B\circ A^{-1}) \geqslant 0.0908$。

事实上,上述算例表明,本文定理的界在某些情况下比文献 [4],文献 [5] 中和文献 [6] 中得到的界更精确,而且本文的结果仅依赖于矩阵和的元素,所以更容易计算。

在定理 1 中,当 $A = B$ 时,下面推论成立。

推论 1　若 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为双严格对角占优 M – 矩阵, $A^{-1} = (\beta_{ij})$, 则

$$q(A\circ A^{-1}) \geqslant \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\min\left\{\min_j\left[1 - \frac{\sum\limits_{t=1}^{r-1}|a_{i_tj}|h_{i_tj}}{a_{jj}}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.\min_{P\subseteq N\,|\,P|=r}\frac{1}{r}\left[\sum_{i\in P}\left(1 - \frac{R_i m_{ik}}{a_{ii}}\right)\right]\right\}\right\}$$

参 考 文 献:

[1] 黄廷祝,杨传胜. 特殊矩阵分析及应用 [M]. 北京: 科学出版社,2003.
[2] 蒋建新,李艳艳. 几类块矩阵的 Hadamard 积的性质 [J].

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(5):34-35.

[3] Horn R A,Johnson C R. Topic in Matrix Analysis [M]. Beijing: People's Posts and Telecommunications Press, 2005.

[4] Horn R A,Johnson C R. Topic in Matrix Analysis [M]. New York: Cambridge University Press,1991.

[5] Huang R,Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Linear Algebra and its applications,2008,428:1551-1559.

[6] Li Y T,Li Y Y,Wang R W. et al. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Linear Algebra and its applications,2010, 432:536-545.

[7] Richard A. Brualdi,Stephen Mellendorf,Regions in the Complex Plane Containing the Eigenvalues of a Matrix [J]. Amer. Math. Monthly,1994,101:975-985.

[8] Yong X R. Proof of a conjecture of Fiedler and Markham [J]. Linear Algebra and its applications,2000,320:167-171.

[9] Chen Shencan. Proof of a conjecture concerning the Hadamard powers of inverse M-matrices [J]. Linear Algebra and its applications,2007,422:477-481.

Bounds on the Minimum Eigenvalues of the Hadamard Product of an M-matrice and Its Inverse

ZHOU Ping, *ZHAO Hui*

(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: A new lower bound of the minimum eigenvalues of Hadamard product for inverse A^{-1} of nonsingular M-matrix A and nonsingular M-matrix B is given. This estimating formula of the bounds are easier to calculate since they only depend on the entries of matrices A and B. The given numerical example show that estimating formula of the bounds is better than several known estimating formulas.

Key words: M-matrix; Hadamard product; smallest eigenvalue; lower bound; diagonally dominant

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net