第 24 卷第 6 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 24 No. 6
2011 年 12 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0722-04

积集上相对单调的似变分不等式

杨 凤

(西华师范大学数学与信息学院,四川 南充 637009)

摘 要:在 Banach 空间中研究了一类在积集上相对单调的似变分不等式问题(VLIP)。针对这类似变分不等式问题(VLIP),给出了新的单调性概念的定义,得到了该类似变分不等式解集刻画及解的存在性,并推广了文献中 Konnov 得到的相应结果。

关键词:似变分不等式;积集;相对单调性;存在性;Banach 空间

中图分类号:O221 文献标识码:A

引 言

在现代非线性分析中,变分不等式对于解决多种平衡形式问题具有非常基础和重要的作用,并且已经将变分不等式理论所得的结果应用于运筹学、经济、数学物理以及其他领域。众所周知,比如在对策理论,运输和网络经济领域中,这类问题的大多数都存在着一个可分解的结构,*Nagurney*[1],Ferris 和 *Pang*[2] 在笛卡尔积集上用变分不等式将这类问题公式化。同时,无论这类变分不等式的分解结构是怎样的,对于这类变分不等式解的存在结果,Ansari 和 *Yao*[3],Hadjisavvas 和 *Schaible*[4] 都是在范数拓扑里的可行集的紧性下或者单调性形式的假设下得到的。

Konnov[5] 对积集上的相对单调变分不等式问题(VIP)进行了研究,并解决了该问题解的存在性,以及在收敛理论中的应用。这篇文章的主要目的是给出一类适合可分解的似变分不等式问题(VLIP)的其他单调形式的概念,通过使用 Ky Fan 引理[6] 得到这类似变分不等式问题(VLIP)解的存在结果的新的定理及推论。

这篇文章中的一些记法,$R^m_>$ 表示 R^m 中所有正向量的集合,即:

$R^m_> = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m \mid a_i > 0, i = 1, \ldots, m\}$. e 表示 R^m 中的单位向量,即:$e = (1, \ldots, 1)$。该文章中用上标表示不同的标量或者是向量的不同分量。

设 E 为实 Banach 空间,E^* 为其对偶空间,$\|\cdot\|$ 表示 E 中的范数,$<x, f>$ 表示 E 与 E^* 中元素的配对,其中 $x \in E, f \in E^*$。对于任意 $B \in E$,$\overline{B^w}$ 表示 B 的弱闭包。

1 预备知识

假设 M 是符号 $\{1, \ldots, m\}$ 的集合。对于任意 $s \in M$,设 X_s 是实 Banach 空间,X_s 为其对偶空间。设 $X = \prod_{s \in M} X_s$,因此对于任意 $x \in X$, $x = (x_s \mid s \in M)$,其中 $x_s \in X_s$。类似地,对于任意 $s \in M$,设 $K_s \subset X_s$ 为非空闭凸集,$K = \prod_{s \in m} K_s$。

对于任意 $s \in M$,设映象 $G_s: K \to X_s^*$,$\eta: K \times K \to X$,其中 $\eta = (\eta_s \mid s \in M)$。

考虑如下的似变分不等式问题(VLIP):求 $x^* \in K$,满足

$$\sum_{s \in M} < G_s(x^*), \eta_s(x_s, x_s^*) > \geqslant 0, \forall x_s \in K_s, s \in M \tag{1}$$

用 K^v 表示(VLIP)(1)的解集。

如果 $\eta_s(x_s, x_s^*) = x_s - x_s^*$,则(VLIP)(1)等价于:求 $x^* \in K$,,满足

$$\sum_{s \in M} < G_s(x^*), x_s - x_s^* > \geqslant 0, \forall x_s \in K_s, s \in M \tag{2}$$

收稿日期:2011-09-27

基金项目:教育部科学技术重点项目(211163)

作者简介:杨 凤(1986-),女,四川绵阳人,硕士生,主要从事优化理论及应用方面的研究,(E-mail)yizyangf@qq.com

$Konnov$[5] 已经对该变分不等式问题(VIP)(2)进行了研究,并得到了解的存在性定理.这篇文章的主要目的是解决(VLIP)(1)的解的存在性定理。

如果 $G(x) = (G_s(x) \mid s \in M)$,定义映象 $G: K \to X^*$,则(VLIP)(1)和通常的似变分不等式问题(VLIP)是等价的:

求 $x^* \in K$,满足 $< G(x^*), \eta(x, x^*) > \geqslant 0, \forall x \in K$ (3)

定义 1.1[2] 设 E 是线性空间,X 是 E 的一个非空子集,$G: X \to 2^E$ 是一个多值映象.称 G 为 KKM 映象,如果对任意有限集 $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$,有

$$co\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$$

引理 1.1 Ky Fan 引理[2]

设 E 是一 Hausdorff 拓扑线性空间,X 是 E 的一个非空子集.设 $G: X \to 2^E$ 为一 KKM 映象,再设对任意 $x \in X$,$G(x)$ 为 E 中的闭集且至少存在一点 $x_0 \in X$,使得 $G(x_0)$ 是 E 中的紧集,则 $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \phi$。

下面给出有关映象 $G: K \to X^*$ 的单调性概念:

定义 1.2 映象 $G: K \to X^*$,$\eta: K \times K \to X$,(i) 称 G 关于 η 是单调的,如果 $< G(x) - G(y), \eta(x, y) > \geqslant 0$,$\forall x, y \in K$;若对于 $\forall x \neq y$,上式不等式符号"$\geqslant$"可由"$>$"代替,则称 G 关于 η 是严格单调的;(ii) 称 G 关于 η 是伪单调的,如果 $< G(y), \eta(x, y) > \geqslant 0 \Rightarrow < G(x), \eta(x, y) > \geqslant 0$,$\forall x, y \in K$;若对于 $\forall x \neq y$,上式不等式符号"$\geqslant$"可由"$>$"代替,则称 G 关于 η 是严格伪单调的。

从以上定义可知:(严格)单调能推出(严格)伪单调的,而相反的结论不成立。下面在定义 1.2 的基础上给出其他单调性的概念。

定义 1.3 映象 $G: K \to X^*$,$\eta: K \times K \to X$,$G(x) = (G_s(x) \mid s \in M)$,($i$) 称 G 关于 η 是相对单调的,如果存在向量 $\alpha, \beta \in R^m_>$,使得 $\sum_{s \in M} < \alpha_s G_s(x) - \beta_s G_s(y), \eta_s(x_s, y_s) > \geqslant 0$,$\forall x, y \in K$;若对于 $\forall x \neq y$,上式不等式符号"$\geqslant$"可由"$>$"代替,则称 G 关于 η 是相对严格单调的;(ii) 称 G 关于 η 是相对伪单调的,如果存在向量 $\alpha, \beta \in R^m_>$,使得

$$\sum_{s \in M} \beta_s < G_s(y), \eta_s(x_s, y_s) > \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{s \in M} \alpha_s < G_s(x), \eta_s(x_s, y_s) > \geqslant 0$$

$\forall x, y \in K$;若对于 $\forall x \neq y$,上式不等式符号"$\geqslant$"可由"$>$"代替,则称 G 关于 η 是相对严格伪单调的。

从以上定义可知:相对(严格)单调能够推出相对(严格)伪单调的,而相反的结论不成立。

对于(VLIP)(1)的研究,还需用到以下连续性的假设。

定义 1.4 映象 $G: K \to X^*$,$\eta: K \times K \to X$,称映象 G 关于 η 是半连续的,如果对于任意 $\lambda \in [0,1]$,$\lambda \mapsto < G(x + \lambda(y - x)), \eta(y, x) >$,$\forall x, y \in K$。

2 存在性定理

固定一个向量 $\gamma \in R^m_>$,考虑和 γ 有关的以下两个问题。

求 $x^* \in K$,使得

$$\sum_{s \in M} \gamma_s < G_s(x^*), \eta_s(y_s, x^*_s) > \geqslant 0, \forall y_s \in K_s, s \in M \quad (4)$$

求 $x^* \in K$,使得

$$\sum_{s \in M} \gamma_s < G_s(y), \eta_s(y_s, x^*_s) > \geqslant 0, \forall y_s \in K_s, s \in M \quad (5)$$

用 $K^v(\gamma)$,$K^d(\gamma)$ 分别表示(VLIP)(3)和(VLIP)(4)的解集。

由以上可知:当 $\gamma = e$ 时,(VLIP)(3)与(VLIP)(1)是一致的,同时(VLIP)(4)是(VLIP)(1)的对偶问题。

引理 2.1 存在 $\gamma \in R^m_>$,使得 $K^v(\gamma) = K^v$。

证明 如果(VLIP)(1)成立,$i.e$,$K^v \neq \phi$。则(VLIP)(3)显然是成立的;另一方面,令 $\gamma = e$,可知(VLIP)(3)中隐藏着(VLIP)(1),所以得到 $K^v(\gamma) = K^v$。

引理 2.2 如果 G 关于 η 是半连续的,则对于任意 $\gamma \in R^m_>$,$K^d(\gamma) \subseteq K^v(\gamma)$。

证明 因为 G 关于 η 是半连续的,则 $G^{(\gamma)} = (\gamma_s G_s \mid s \in M, \gamma \in R^m_>)$ 关于 η_s 也是半连续的,$i.e$,对于任意 $\lambda \in [0,1]$,有 $\lambda \mapsto < G_s(x^* + \lambda(y - x^*)), \eta_s(y_s, x^*_s) >$,$\forall y_s \in K_s$,$s \in M$.由题意,设存在 $x^* \in K$,使得 $\sum_{s \in M} \gamma_s < G_s(y), \eta_s(y_s, x^*_s) > \geqslant 0$,$\forall y_s \in K_s$,$s \in M$。

则可以得到:

$$\sum_{s \in M} \gamma_s < G_s(x^*), \eta_s(y_s, x^*_s) > \geqslant 0$$
$$\forall y_s \in K_s, s \in M$$

引理 2.3 如果 G 关于 η 是半连续且关于 η 是相

对伪单调的,则存在 $\beta \in R^m_>$,使得

$$K^v = K^v(\beta) = K^d(\beta)$$

证明 因为 G 关于 η 是半连续的且由引理 2.1 和引理 2.2,可知 $K^d(\beta) \subseteq K^v(\beta) = K^v$,又因为 G 关于 η 是相对伪单调的,则

$$\sum_{s\in M}\beta_s < G_s(x^*), \eta_s(y_s, x_s^*) > \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{s\in M}\beta_s < G_s(y), \eta_s(y_s, x_s^*) > \geqslant 0$$

$$\forall x, y \in K, i.e, K^v(\beta) \subseteq K^d(\beta)$$

所以得证

$$K^v = K^v(\beta) = K^d(\beta)$$

定理 2.1 假设 G 关于 η 是半连续的且关于 η 是相对伪单调的,$K \subset X$ 是弱紧集,对任意固定的 $x_s \in K_s$ 和 $z^* \in X^*$,$y_s \mapsto < z^*, \eta_s(y_s, x_s) >$ 是仿射的,$s \in M$;且 $\eta_s(x_s, z_s) = \eta_s(x_s, y_s) + \eta_s(y_s, z_s)$,$\forall x_s, y_s, z_s \in K_s$,$s \in M$。

则(VLIP)(1)有解。

证明 用以下形式定义集值映象 $A, B: K \mapsto 2^K$,

$$B(y) = \{x \in K \mid \sum_{s\in M}\beta_s < G_s(x), \eta_s(y_s, x_s) > \geqslant 0\}$$

$$A(y) = \{x \in K \mid \sum_{s\in M}\beta_s < G_s(y), \eta_s(y_s, x_s) > \geqslant 0\}$$

下面分三个步骤证明该定理。

(i) $\cap_{y\in K}\overline{B(y)}^w \neq \phi$

设 $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\} \subset K$ 为有限集,令 $z \in co\{y^1, y^2, \ldots, y^n\}$,则 $z = \sum_{i=1}^n t_i y^i$,其中 $t_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n$,$\sum_{i=1}^n t_i = 1$。若

$$z \notin \cup_{i=1}^n B(y^i)$$

则

$$\sum_{s\in M}\beta_s < G_s(z), \eta_s(y_s^i, z_s) > < 0$$

$$\forall i = 1, \ldots, n$$

由题意,对任意固定的 $x_s \in K_s$ 和 $z^* \in X^*$,$y_s \mapsto < z^*, \eta_s(y_s, x_s) >$ 是仿射的,$s \in M$;且 $\eta_s(x_s, z_s) = \eta_s(x_s, y_s) + \eta_s(y_s, z_s)$,$\forall x_s, y_s, z_s \in K_s$,$s \in M$。

所以可以得到:

$$0 > \sum_{s\in M}\beta_s < G_s(z), \eta_s(y_s^i, z_s) >, \forall i = 1, 2, \ldots, n, i.e$$

$$0 > \sum_{s\in M}\beta_s < G_s(z), \eta_s(\sum_{i=1}^n t_i y_s^i, z_s) >$$

$$= \sum_{s\in M}\beta_s < G_s(z), \eta_s(z_s, z_s) > = 0$$

矛盾

所以 $z \in \cup_{i=1}^n B(y^i)$,又因为 $\overline{B(y)}^w$ 是弱紧的,根据引理 1.1,则 $\cap_{y\in K}\overline{B(y)}^w \neq \phi$。

(ii) $\cap_{y\in K}A(y) \neq \phi$

由题意 G 关于 η 是相对伪单调的,则 $B(y) \subseteq A(y) \subseteq K$,又因为 $A(y)$ 显然是弱紧的,所以由(i)的证明,能够得到 $\cap_{y\in K}A(y) \neq \phi$。

(iii) $K^v \neq \phi$

由(ii),得到 $K^d(\beta) \neq \phi$,又根据引理 2.3,所以 $K^v \neq \phi$。

得证(VLIP)(1)存在解。

推论 2.1 假设 G 关于 η 是半连续的且关于 η 是相对严格伪单调的,$K \subset X$ 是弱紧集,$\eta_s(x_s, z_s) = \eta_s(x_s, y_s) + \eta_s(y_s, z_s)$,$\forall x_s, y_s, z_s \in K_s$,$s \in M$。

则(VLIP)(1)存在唯一的解。

证明 假设存在 $x', x'' \in K^v$ 且 $x' \neq x''$。根据引理 2.3,存在 $\gamma \in R^m_>$,使得

$$x' \in K^v(\gamma). i.e, \sum_{s\in M}\gamma_s < G_s(x''), \eta_s(x_s', x_s'') > \geqslant 0$$

$$\forall x_s'' \in K_s, s \in M$$

因为 G 关于 η 是相对严格伪单调的,所以

$$\sum_{s\in M}\gamma_s < G_s(x''), \eta_s(x_s', x_s'') > > 0$$

又因为

$$\eta_s(x_s, z_s) = \eta_s(x_s, y_s) + \eta_s(y_s, z_s)$$

$$\forall x_s, y_s, z_s \in K_s, s \in M. i.e$$

$$\eta_s(x_s, y_s) = -\eta_s(y_s, x_s), \forall x_s, y_s, z_s \in K_s, s \in M$$

所以

$$\sum_{s\in M}\gamma_s < G_s(x''), \eta_s(x_s'', x_s') > < 0, \forall x_s' \in K_s, s \in M. i.e, x'' \notin K^v(\gamma)$$

根据引理 2.3,所以 $x'' \notin K^v$,矛盾。

所以(VLIP)(1)存在唯一的解。

为了在非有界集上得到(VLIP)(1)解的结果,需要在定理 2.1 的基础上添加一些强制性的条件。

推论 2.2 假设 G 关于 η 是半连续的且关于 η 是相对伪单调的,对任意固定的 $x_s \in K_s$ 和 $z^* \in X^*$,$y_s \mapsto < z^*, \eta_s(y_s, x_s) >$ 是仿射的,$s \in M$;

且 $\eta_s(x_s, z_s) = \eta_s(x_s, y_s) + \eta_s(y_s, z_s)$

$\forall x_s, y_s, z_s \in K_s, s \in M$

存在一个弱紧子集 $Y \subset X$,$\tilde{y} \in Y \cap K$,使得:

$$\sum_{s\in M}\beta_s < G_s(x), \eta_s(\tilde{y}_s, x_s) > < 0, \forall x \in K\backslash Y$$

则(VLIP)(1)有解。

证明 易知在该推论的假设下,$B(\tilde{y}) \subseteq Y$,且 $\overline{B(\tilde{y})}^w$ 是弱紧的,根据引理 1.1,因此定理 2.1 的(i)成

立. 又因为该推论满足定理2.1的(ii)和(iii)的证明条件,所以定理2.1的(ii)和(iii)也是成立,得证(VLIP)(1)有解。

参考文献:

[1] Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach [J]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht., 1993.

[2] Ferris M, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity Problems [J]. SIAM Rev., 1997, 39: 669-713.

[3] Ansari Q H, Yao J C. A fixed point theorem and its applications to a system of variational inequalities [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1999, 59: 433-442.

[4] Hadjisavvas N, Schaible S. Quasimonotonicity and pseudomonotonicity n variational inequalities and equilibrium problems [J]. In: J P. Crouzeix, J E. Martinez-Legaz, M. Volle(Eds), Generalized Convexity, Generalized Monotonicity, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht., 1998, 257-275.

[5] Konnov I V. Relatively monotone variational inequalities-like over product sets [J]. Oper Res Lett., 2001, 28: 21-26.

[6] Ky Fan. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem [J]. Math. Ann., 1961, 142: 303-310.

[7] 张石生. 变分不等式及其相关问题 [M]. 重庆: 重庆出版社, 2008.

Relatively Monotone Variational-like Inequalities over Product Sets

YANG Feng

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: The relatively monotone variational-like inequalities over product sets in Banach spaces are introduced. Some definitions of new monotonicity concepts for the variational-like inequalities are presented, and the characterizations of solutions set and existence of solutions for the variational-like inequalities are investigated. The corresponding results of Konnov's in reference are extended.

Key words: variational-like inequalities; product sets; relative monotonicity; existence results; Banach spaces