第24卷第6期　四川理工学院学报(自然科学版)　Vol. 24　No. 6
2011年12月　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0715-04

赌博的鞅论模型及随机模拟

魏艳华[1]，王丙参[1]，李艳颖[2]

(1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃　天水　741001;2. 宝鸡文理学院数学系，陕西　宝鸡　721013)

摘　要:赌博是一种重要的社会现象,对其定性研究很多,但关于运用数学模型进行定量研究的文献并不多。鉴于此,运用概率论及鞅论建立了赌博模型,探讨了破产概率、赌博策略及赌博停止次数。最后给出了Matlab编制的随机模拟程序,并依据数值模拟结果对赌博策略提出了几点指导意见。

关键词:赌博模型;鞅论;随机模拟

中图分类号:O211.9　　文献标识码:A

引　言

近几十年来,鞅论不仅在随机过程及其它数学分支中占据了重要的地位,而且在实际问题诸如金融、保险及可靠性理论上也得到了广泛的应用,如在风险模型中,利用鞅论求解破产概率是非常简洁的[1-3]。赌博是人类的第二大天性,自古至今一直活跃在人们的生活中,并对社会、经济、政治、文化等方面产生了各种各样的影响,然而实际中的各种赌博胜负都带有极大的偶然性[4-5]。本文运用鞅论建立了赌博模型,探讨了破产概率、赌博策略及赌博停止次数,最后运用Matlab软件进行了随机模拟。

1　赌博模型

引理1.1[6-7]　若在一次选举中,候选人A得到n张选票而候选人B得到m张选票且$n > m$,假定选票的一切排列次序是等可能的,则在计票过程中,A的票数始终领先的概率$P_{n,m} = \frac{(n-m)}{(n+m)}$。

定理1.1　若赌徒甲开始有a元,乙有b元,在每次赌局中甲以概率p赢得乙一元,且各局赌博结果相互独立没有和局,赌博一直进行到有一个人全部输光为止,令$q = 1 - p$,$c = a + b$,$\beta = \frac{q}{p}$,则甲恰好$a + 2i$局输光的概率是$\frac{a}{a+2i}C_{a+2i}^{i}p^{i}q^{a+i}$,甲输光的概率

$$P_a = \begin{cases} \frac{b}{a+b}, p = q = \frac{1}{2} \\ \frac{p^b q^a - q^c}{p^c - q^c} = \frac{\beta^a - \beta^c}{1 - \beta^c}, p \neq q \end{cases}$$

乙输光的概率为$1 - P_a$。

证明　令A="恰好赌$a + 2i$局输光",B_k="$a + 2i$局中赢k局",$k = 0,1,\cdots$,由全概率公式可得

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A \mid B_k)P(B_k) = P(A \mid B_i)P(B_i) =$$

$$P_{a+i,i}C_{a+2i}^{i}p^{i}q^{a+i} = \frac{a}{a+2i}C_{a+2i}^{i}p^{i}q^{a+i}$$

令X_n表示赌了n局后甲手中的赌金,则$\{X_n, n \geq 0\}$是一个齐次马尔科夫链(MC),状态空间$E = \{0,1,\cdots,c\}$,状态$0,c$为吸收态,其一步转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} p, j = i + 1 \\ q, j = i - 1 \\ 0, 其他 \end{cases}, \forall 0 < i < c, p_{00} = p_{cc} = 1$$

设P_i表示甲从状态i出发到破产的概率,显然有$P_0 =$

收稿日期:2011-10-08

基金项目:甘肃省自然科学研究基金计划(096RJZE106);甘肃省教育厅项目(0908-07)

作者简介:魏艳华(1978-),女,吉林四平人,讲师,硕士,主要从事随机过程及金融数学方面的研究,(E-mail)wei5yan6hua7@126.com

$1, P_c = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant c-1$，由全概率公式可得

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \Leftrightarrow P_{i+1} - P_i = \beta(P_i - P_{i-1})$$

故有

$$P_{i+1} - P_i = \beta^i (P_1 - P_0)$$

将上式连加可得

$$P_c - P_i = (P_1 - P_0) \sum_{k=i}^{c-1} \beta^k, \forall 0 \leqslant i \leqslant c$$

$$P_i = \begin{cases} (c-i)(1-P_1), p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\beta^i - \beta^c}{1-\beta}(1-P_1), p \neq q \end{cases}$$

令 $i = 1$ 可得

$$P_1 = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{c}, p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\beta - \beta^c}{1-\beta^c}, p \neq q \end{cases}$$

将 P_1 代入上式得:

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{(c-i)}{c}, p = q \\ \dfrac{\beta^i - \beta^c}{1-\beta^c}, p \neq q \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_a = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b}, p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{p^b q^a - q^c}{p^c - q^c} = \dfrac{\beta^a - \beta^c}{1-\beta^c}, p \neq q \end{cases}$$

如果甲乙两人的赌博技能一样，则他们破产的概率与他们各自所拥有的财产成反比，因此同一个富有的对手玩这种游戏是不明智的，由于 $b \to \infty$，则 $P_a \to 0$，所以从长期来看，你最终破产几乎是必然的，更不用说对手是一个赌博经验丰富的巨富。若 $p > q$，$P_a = \beta^a \dfrac{1-\beta^b}{1-\beta^c} < \beta^a$，所以既使乙在赌本上占有明显优势，结果仍会很差，即仍有 $1 - \beta^a$ 的可能破产。由上可知，当你来到一个群体时，先环顾下四周，如果没有发现比你傻的人，则我不幸告诉你，你可能就是最傻的一个，傻并不太可怕，关键是你要认识到自己的傻，否则别人兴高采烈的喊你去赌博，你也兴高采烈的去了，结果可想而知，人家兴高采烈是因为人家满载而归，你兴高采烈是因为你傻。但如果你博弈技术很高，如果在法律容许且风险可以容忍的情况下，适当参加博弈是对你有利的。

2 赌博的鞅论模型

定理2.1[3] 设 $\{M_n, F_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n), n \geqslant 0\}$ 为鞅，T 是停时且满足 $P(T < \infty) = 1$，$E(|M_T|) < \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} E(|M_n| I_{\{T>n\}}) = 0$，则 $EM_T = EM_0$。

定理2.2[3] 设 $\{M_n\}$ 是关于 $\{F_n\}$ 的鞅，若 $\exists$ 一个非负 $r.v\,Y$ 满足 $EY < \infty$ 且对 $\forall n$ 成立 $|M_n| < Y$，则 $\{M_n\}$ 是一致可积鞅。

定理2.3[3] 设 $\{M_n, F_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n), n \geqslant 0\}$ 为一致可积鞅，T 是停时且满足 $P(T < \infty) = 1$，$E(|M_T|) < \infty$，则 $EM_T = EM_0$。

每个赌博者自然都对使得他在一系列赌博后获得期望收益最大化的策略感兴趣。若一个赌博者正在进行一系列的赌博，每次赌博赢的概率是 p，令 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布($i.i.d$) 的随机变量($r.v$)，表示每次赌博的结果，$P\{Y_n = 1\} = p$，$P\{Y_n = -1\} = 1 - p = q$ 分别表示赌博者在第 n 次赌博时赢和输。如果赌博者采用的赌博策略依赖于前面的赌博结果，那么他的赌博可以用下述的 $r.v$ 序列 $b_n = b_n(Y_1, \cdots, Y_{n-1}), n \geqslant 2$ 描述，其中 $b_n < \infty$ 是第 n 次的赌注，若赢则获利 b_n，否则输掉 b_n。设 X_0 是该赌博者的初始赌资，则 $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i$ 是他在第 n 次赌博后的赌资，记 $X = \{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$。

$$E[X_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] =$$
$$E[X_n | Y_1, \cdots, Y_n] + E[b_n Y_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] =$$
$$X_n + b_{n+1} E[Y_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] = X_n + b_{b+1} E[Y_{n+1}]$$

当 $p \geqslant 0.5$，则 $E[X_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] \geqslant X_n$，即 X 为下鞅; 当 $p \leqslant 0.5$，则 $E[X_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] \leqslant X_n$，即 X 为上鞅; 当 $p = 0.5$，则 $E[X_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] = X_n$，即 X 为鞅; 显然当 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为鞅时，对期望收益而言他在下一次赌博结束时的赌资将等于现在的赌资，而与过去的输赢无关，这也是鞅所具有的一种无后效性，而同时这体现的正是赌博的公平(如果每次赌博的输赢机会是均等的，并且赌博策略是依赖于前面的赌博结果，则赌博是公平的) ，任何赌博者都不可能将公平的赌博通

过改变赌博策略使赌博变为对自己有利的赌博。鞅描述的是公平赌博,下鞅和上鞅分别描述了有利赌博和不利赌博。

若赌注 $b_n \equiv 1$,则称 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为简单随机徘徊,而简单随机徘徊是常返的,即对 $\forall$ 整数 i 有 $P(\exists n > 1$ 使得 $X_n = i \mid X_0 = i) = 1$。对于 $m > n$ 有

$$P(X_n = r, X_m = s) = P(X_n = r, X_m - X_n = s - r) =$$

$$C_n^{\frac{n+r}{2}} p^{\frac{n+r}{2}} q^{\frac{n-r}{2}} C_{m-m}^{\frac{m-n+s-r}{2}} p^{\frac{m-n+s-r}{2}} q^{\frac{m-n-s+r}{2}}$$

对于 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 类似有

$$P(X_{n_1} = s_1, \cdots, X_{n_k} = s_k) = \prod_{l=1}^{k} C_{m_l}^{r_l} p^{r_l} q^{m_l - r_l}$$

其中

$$m_l = n_l - n_{l-1}, r_l = 0.5(n_l - n_{l-1} + s_l - s_{l-1})$$

若 $X_0 \equiv x$,则 $EX_n = x + n(p - q)$,$DX_n = nDY_i = 4npq$,$\mathrm{cov}(X_n, X_m) = 4(n \wedge m)pq$。

若 $b_n \equiv 1$,直至其中某一人输光为止,赌博终止,设初始时刻甲有 a 元,赌徒乙有 b 元,在每次赌局中甲以概率 p 赢,而且各局的进行相互独立,规定不欠不借,甲输光的概率为 P_a,乙为 P_b。由全概率公式可知 $P_a = pP_{a+1} + qP_{a-1}$,这是一个常系数的差分方程,且边界条件为 $P_0 = 1, P_{a+b} = 0$,对 a 归纳可得这个差分方程的解为

$$P_a = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b}, p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{p^b q^a - q^c}{p^c - q^c} = \dfrac{\beta^a - \beta^c}{1 - \beta^c}, p \neq q \end{cases}$$

若 A 表示首次赢一元,则 $T_1 = \inf\{n, X_n \in A\}$ 并约定 $T_1(\phi) = \inf\{n, X_n \in \phi\} = \infty$,可见 T_1 是关于 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 停时且 $P(T_1 < \infty) = 1$。令 $T = \inf\{n: X_n = 0$ 或 $X_n = a + b\}$ 表示甲输光或乙输光,则 T 及 $T \wedge T_1$ 为停时。又因为 $E|X_{T \wedge T_1}| \leqslant a + b$,所以 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一致可积鞅,由鞅停时定理可知 $EX_{T \wedge T_1} = EX_0$,即采用首次赢一元就停止的赌博策略也不会对你有利,这与人们的直觉有一定的偏差。当然在简单随机徘徊中,采用首次赢 1 元就停止的策略是稳赢 1 元的,但它显然是不公平的策略,因为让参与博弈的人不加限制的欠钱是一个对他过分倾斜的有利条件。

其实:当 $p = 0.5$,$X = \{X_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i\}$ 是鞅且满足 $E|X_n| \leqslant a + b, \forall n$,即 X 为一致可积鞅。由 $E|X_T| \leqslant a + b$ 及鞅停时定理可知 $EX_T = EX_0 = a$,另一方面 $EX_T = 0 \times P(X_T = 0) + (a + b)P(X_T = a + b)$,即 $P_a = 1 - P(X_T = a + b) = \dfrac{b}{a+b}$。

3　随机模拟

随着计算技术的飞速发速,随机模拟成为进行科学研究的有力工具,利用随机模拟方法研究破产概率也成为一种快捷易行的手段且受到很多人的青睐。Matlab 软件是集数值计算、符号运算及图形处理等强大功能于一体的科学计算语言[7]。假如甲的初始财产为 a 元,乙为 b 元且每一局甲胜的概率为 p,共模拟 50000 次,matlab 程序如下:

```
time1 = 0; time2 = 0; sum = 0;
num = 50000; % 模拟的次数
for i = 1: num
k = 0; a = 10; % 甲的初始财产
b = 5;  % 乙的初始财产
p = 0.55; % 每一局甲胜的概率
while a > 0&b > 0 w = rand(1,1);
if w < = p a = a + 1; b = b - 1;
else b = b + 1; a = a - 1;
end
k = k + 1; end
sum = sum + k;
if a = = 0 time1 = time1 + 1; end
if b = = 0 time2 = time2 + 1; end
end
p1 = time1/num % 甲破产的概率
p2 = time2/num % 乙破产的概率
mean = sum/num % 赌博的平均次数
```

模拟结果如表 1。

表1 随机模拟结果

甲的财产 a	乙的财产 b	每局甲胜的概率 p	最终甲破产的概率	赌博次数
10	5	0.55	0.0909	33
5	10	0.55	0.3336	50
5	100	0.55	0.3663	617

由此可见,如果甲在单次博弈中获胜的概率大于乙,即使乙拥有更多的财产,甲也有可能逃脱破产的厄运且概率很大,对于此次博弈来说,甲逃脱破产的概率是为0.6337。可见只要长时间参与不利博弈,破产的概率是很大的,时间越长,概率越大,极限为1。

参考文献:

[1] 张波,张景肖. 应用随机过程[M]. 北京:清华大学出版社. 2004.

[2] 龚光鲁. 随机微分方程及其应用概要[M]. 北京:清华大学出版社,2008.

[3] 王丙参,魏艳华. 保费收取次数为负二项随机过程的风险模型[J]. 江西师范大学学报,2010,34(6):604-608.

[4] 刘文. 关于公平赌博的一个强极限定理[J]. 系统科学与数学,2002,22(4):452-457.

[5] 赵娟,金燕生,刘征福. 赌徒破产概率的生灭过程模型[J]. 黑龙江大学:自然科学学报,2010,27(2):175-179.

[6] 马占友,陈利. 关于赌博问题的研究[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2006,9(1):48-50.

[7] 农吉夫. 赌博破产概率及其随机模拟试验[J]. 数学的实践与认识,2010,40(16):222-227.

Gambling Model with Martingale Theory and Stochastic Simulation

WEI Yan-hua[1], *WANG Bing-can*[1], *LI Yan-ying*[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;

2. Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721007, China)

Abstract: Gambling is an important social phenomenon. There are a lot of qualitative researches, but the corresponding research literature about its mathematical models is few. The gambling model is established by using probability and martingale, the probability, gambling strategy and gambling stop times are studied. Random simulation program are explored by using matlab software. According to the simulation result, a few comments of gambling strategy are given.

Key words: gambling model; Martingale theory; stochastic simulation