第24卷第6期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 24 No. 6
2011年12月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0706-04

变分不等式在运输网络中的运用

黄 渊

(西南民族大学经济学院,成都 610041)

摘 要:根据均衡的定义以及与之等价的变分不等式,讨论了运输网络中存在两种不同但相关的流量的情况。最后给出了相关流量的存在性条件,即运输网络中流量成本达到最小的条件。

关键词:运输网络;变分不等式;一致单调;一致Lipschitz连续

中图分类号:O177.92;O221 文献标识码:A

引 言

我们生活的世界上存在着大量复杂的系统,其中很多都可以通过网络来加以描述。例如社会网络、计算机网络、蛋白质网络和食物网络[1]。交通网络主要是研究交通流量的均衡,就是在知道一定的交通需求量或给定的弹性需求模式下,求流量在网络上的分布格局.变分不等式被广泛应用于研究各种各样的网络。有文献探讨了在电子商务、退货等方面的应用[2];也有文献探讨了其在电力配流方面的运[3]。变分不等式也是研究交通运输网络、分析网络均衡流量最有效的工具之一[4]。

当道路上有两种相互影响的交通流量时,要考虑的是如何将这两种交通流进行适当配置,使总成本达到最优.我们主要考虑以下几个方面的内容:(1)流量均衡的定性描述;(2)将定性的描述转化为定量的刻画,利用变分不等式定义可行流量;(3)给出相关可行流量的存在性和唯一性条件。

1 可行流量及其等价性条件

在交通网络均衡分析中,一些常用记号如下:

W 表示起讫点(OD)对 w 的集合,不妨设

$W = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$

$$H = \begin{pmatrix} h_1^{w_1} & h_2^{w_1} & \cdots & h_n^{w_1} \\ h_1^{w_2} & h_2^{w_2} & \cdots & h_n^{w_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_1^{w_m} & h_2^{w_m} & \cdots & h_n^{w_m} \end{pmatrix}$$

其中 $h_j^{w_i}(i = 1,2,\cdots m; j = 1,2,\cdots n)$ 是(OD)。

对 w_i 的第 j 条路径上的流量。一般而言,不同(OD)对 w_i 与 $w_j(i,j = 1,2,\cdots m)$ 之间路径的条数可能不一样,即矩阵 H 的每行的元素个数有可能不一样。设 n 是所有(OD)对中路径条数最多的(OD)对之间的路径条数,即矩阵 H 的行向量中元素个数最多的行向量的元素的个数,在行向量分量不足 n 的向量里面添加一些0为分量即可。以下我们总假定 H 是一 $m \times n$ 的矩阵,记全体 $m \times n$ 矩阵为 $R_{m\otimes n}$,从而 $H \in R_{m\otimes n}$。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^\tau$,$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)^\tau$,$g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)^\tau$ 都是 m 维列向量,其中 $\lambda_i, \mu_i, (i = 1,2,\cdots,m)$ 是起讫点(OD)对 w_i 上运输流量的约束量,即最低和最高流量限制。$g_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 是起讫点对(OD)上的流量总和。满足 $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$,$0 \leqslant g$。如果令 $I = (1,1,\cdots,1)^\tau \in R^n$,则满足下面的约束条件与需求条件的流量 H 称为是一个可行流量[1]:

$HI = g$,且 $\lambda \leqslant g \leqslant \mu$

将全体可行流量记为 Λ,即

$$\Lambda = \{H \mid H \in R_{m\otimes n}, \sum_{j=1}^{n} h_j^{w_i} = g_i, \lambda_i \leqslant g_i \leqslant \mu_i, i = 1,2,\cdots m\}$$

当 $H_1, H_2 \in \Lambda, \alpha \in [0,1]$ 时,有:

$$[H_1 + \alpha(H_2 - H_1)]I = H_1 I + \alpha(H_2 I - H_1 I) = g + \alpha(g - g) = g$$

所以,以下假设 Λ 是非空的闭凸集。

收稿日期:2011-10-20

作者简介:黄 渊(1975-),男,四川巴中人,助教,硕士,主要从事金融数学方面的研究,(E-mail)huangyu20091002@sina.com

用 $C: \Lambda \to R_{m\otimes n}$ 表示运输网络中运输流量的成本函数。所谓均衡原理,就是在连接每个起讫点(OD)对 w_i 的所有被使用的路径上有相同的成本,且小于或等于任何未被使用的路径上的成本[5]。即对任意 $w_i \in W$,由 $C_s^{w_i}(H) < C_t^{w_i}(H)$ 成立,可得出 $h_s^{w_i} = \mu$ 或 $h_t^{w_i} = \lambda$。当运输网络中的流量达到均衡时,整个网络的成本将会最小。所以,讨论成本的最小化可归结为寻找网络中流量的均衡问题。而均衡原理又等价于对任 $H \in \Lambda$ 均有下式成立:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(H^*)(h_j^{w_i} - h_j^{*\,w_i}) \geq 0$$

当 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in R_{m\otimes n}$ 时,我们规定: $[A,B] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$,对应的范数为

$$\|A\| = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

定义 1[6]　对于 $H^* \in \Lambda$,如果下式对任意 $H \in \Lambda$ 都成立:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(H^*)(h_j^{w_i} - h_j^{*\,w_i}) \geq 0$$

就把 H^* 叫做一个均衡流量。

引理 2[7]　记 $P_\Lambda: R_{m\otimes n} \to \Lambda$ 是从 R^m 到 Λ 的投影算子,则对任意的 $H_1, H_2 \in R_{m\otimes n}$。有

$$\|P_\Lambda(H_1) - P_\Lambda(H_2)\| \leq \|H_1 - H_2\|$$

即投影算子非扩张。

引理 3[7]　下面两个结论等价:

(1) 对于任何一个非空的闭凸集 Λ, $H^* \in \Lambda$ 是如下变分不等式: 对任意 $H \in \Lambda$, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(H^*)(h_j^{w_i} - h_j^{*\,w_i}) \geq 0$,的解。

(2) 存在 $\alpha > 0$,使得

$$H^* = P_\Lambda(H^* - \alpha H^*)$$

引理 4[8]　设 X 是一个 Banach 空间, $F: X \to X$ 满足如下条件: 对任意 $x, y \in X$ 有:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \phi(\|x - y\|)$$

其中 $\phi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是一个单调递增函数,满足任意 $\alpha \in R^+$,都有 $\phi(\alpha) < \alpha$ 成立. 那么,存在唯一 $u \in X$,使得 $F(u) = u$。

2　相关流量向量

关于运输网络中交通流量的各种研究中,不管是静态还是动态、不管是离散还是连续,在同一时刻、同一道路上一般都只考虑了只有一种运输流量的情况。即仅用变分不等式而不是变分不等式组来考虑流量情况。这一点往往与实际情况不相符,因为在实际生活之中,往往要在同一时刻、同一条道路上需要安排两种及其以上的流量。这样原先分开核算的成本函数 $C(H_1)$(仅与 H_1 有关)就变成了 $C(H_1, H_2)$, $C(H_1, H_2)$ 当然不能简单地认为是 $C(H_1) + C(H_2)$。这是因为,更多情况下,当我们适当配流之后, $C(H_1, H_2)$ 远远小于 $C(H_1) + C(H_2)$。所以,就很有必要考虑同一个交通运输网络中有两种交通流量的配流问题,也就是相关流量的配置问题。

定义 5　如果对任意的 $F, G \in \Lambda$,都有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(1)}(H_1, H_2)(f_j^{w_i} - h_j^{(1)\,w_i}) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(2)}(H_1, H_2)(g_j^{w_i} - h_j^{(2)\,w_i}) \geq 0$$

我们就把 $(H_1, H_2) \in \Lambda \times \Lambda$ 称为是一对相关运输流量。其中 $C_i(\cdot, \cdot): \Lambda \times \Lambda \to R_{m\otimes n}$ $(i = 1, 2)$ 表示相关运输流量的成本函数,其中 $C_1(H_1, H_2)$ 表示以 H_1 为主要运输流量的成本函数,也即单一交通流量 H_1 的成本函数 $C(H_1)$ 加上 H_2 的影响之后的成本函数。$C_2(H_1, H_2)$ 的意义同样。根据前面的讨论,相关运输流量也就是使运输网络的总成本达到最小时的流量分配向量。

定理 6　对于 $(H_1, H_2) \in \Lambda \times \Lambda$,如果存在常数 η 使得以下两式:

$$H_1 = P_\Lambda(H_1 - \eta C_1(H_1, H_2))$$

$$H_2 = P_\Lambda(H_2 - \eta C_2(H_1, H_2))$$

同时成立,则 (H_1, H_2) 是相关运输流量。

证明　因为存在常数 η 使得

$$H_1 = P_\Lambda(H_1 - \eta C_1(H_1, H_2))$$

$$H_2 = P_\Lambda(H_2 - \eta C_2(H_1, H_2))$$

根据引理 3, $F, G \in \Lambda$,都有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(1)}(H_1, H_2)(f_j^{w_i} - h_j^{(1)\,w_i}) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(2)}(H_1, H_2)(g_j^{w_i} - h_j^{(2)\,w_i}) \geq 0$$

所以, (H_1, H_2) 是相关运输流量。

3　主要结果

当 $A, B \in \Lambda$ 时,我们定义空间 $\Lambda \times \Lambda$ 上的范数如下:

$$\|(A, B)\|_1 = \|A\| + \|B\| = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

在该范数之下, $\Lambda \times \Lambda$ 是一个 Banach 空间。

定义 7 映射 $C_1(A,B):\Lambda\times\Lambda\to R_{m\otimes n}$ 一致单调是指：存在单调递减的函数 $\theta:[0,\infty)\to[0,\infty)$，对任意 $A_1,B_1,A_2,B_2,A,B\in\Lambda$，都有以下两式同时成立：

$$[C_1(A_1,B)-C_1(A_2,B),A_1-A_2]$$
$$\geqslant\theta(\|A_1-A_2\|)\|A_1-A_2\|^2$$
$$[C_1(A,B_1)-C_1(A,B_2),B_1-B_2]$$
$$\geqslant\theta(\|B_1-B_2\|)\|B_1-B_2\|^2$$

定义 8 映射 $C_1(A,B)$ 在 $\Lambda\times\Lambda$ 上是一致 $Lipschitz$ 连续是指：存在单调递增的函数 $L:[0,\infty)\to(0,\infty)$，使得任 $A_1,B_1,A_2,B_2,A,B\in\Lambda$，都有：

$$\|C_1(A_1,B)-C_1(A_2,B)\|$$
$$\leqslant L(\|A_1-A_2\|)\|A_1-A_2\|,$$
$$\|C_1(A,B_1)-C_1(A,B_2)\|$$
$$\leqslant L(\|B_1-B_2\|)\|B_1-B_2\|$$

定理 9 成本函数 $C_i(A,B)(i=1,2)$ 如果满足：

①在 $\Lambda\times\Lambda$ 上 $C_1(A,B)$，$C_2(A,B)$ 一致单调单调；

②在 $\Lambda\times\Lambda$ 上 $C_1(A,B)$，$C_2(A,B)$ 一致 $Lipschitz$ 连续；

③存在 $\eta>0$，对任意 $\alpha\in[0,+\infty)$，函数 $\phi(\alpha)$ 非负且单调递增，且 $\phi(\alpha)<\alpha$。这里

$$\phi(\alpha)=\{\sqrt{2}[2-2\eta\theta(\alpha)+\eta^2L(\alpha)]^{\frac{1}{2}}+\eta L(\alpha)\}\alpha$$

其中

$$\theta(\alpha)=\theta_1(\alpha)+\theta_2(\alpha)$$
$$L(\alpha)=L_1(\alpha)+L_2(\alpha)$$

$\theta_1(\alpha)$、$\theta_2(\alpha)$ 和 $L_1(\alpha)$、$L_2(\alpha)$ 分别是 $C_1(A,B)$，$C_2(A,B)$ 在定义 7 和定义 8 中的对应函数 θ，L。

那么，在该运输网络的可行流量空间 $\Lambda\times\Lambda$ 中一定存在相关运输流量。

证明 令 $F(A,B)=(F_1(A,B),F_2(A,B))$

其中

$$F_1(A,B)=P_\Lambda[A-\eta C_1(A,B)]$$
$$F_2(A,B)=P_\Lambda[B-\eta C_2(A,B)]$$

当 $(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in\Lambda\times\Lambda$ 时

$$\|F(A_1,B_1)-F(A_2,B_2)\|_1=$$
$$\|F_1(A_1,B_1)-F_1(A_2,B_2)\|+$$
$$\|F_2(A_1,B_1)-F_2(A_2,B_2)\|=$$
$$\|P_\Lambda[A_1-\eta C_1(A_1,B_1)]$$
$$-P_\Lambda[A_2-\eta C_1(A_2,B_2)]\|$$
$$+\|P_\Lambda[B_1-\eta C_2(A_1,B_1)]$$
$$-P_\Lambda[B_2-\eta C_2(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\|(A_1-A_2)-\eta[C_1(A_1,B_1)-C_1(A_2,B_2)]\|+$$
$$\|(B_1-B_2)-\eta[C_2(A_1,B_1)-C_2(A_2,B_2)]\|$$

其中

$$\|(A_1-A_2)-\eta[C_1(A_1,B_1)-C_1(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\|(A_1-A_2)-\eta[C_1(A_1,B_1)-C_1(A_2,B_1)]\|+$$
$$\eta\|[C_1(A_2,B_1)-C_1(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\{\|A_1-A_2\|^2-$$
$$2\eta[C_1(A_1,B_1)-C_1(A_2,B_1),A_1-A_2]+$$
$$\eta^2\|C_1(A_1,B_1)-C_1(A_2,B_1)\|^2\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$\eta\|[C_1(A_2,B_1)-C_1(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\{\|A_1-A_2\|^2-2\eta\theta_1(\|A_1-A_2\|)\cdot\|A_1-A_2\|^2$$
$$+\eta^2L_1(\|A_1-A_2\|)\cdot\|A_1-A_2\|^2\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$\eta\|[C_1(A_2,B_1)-C_1(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\{1-2\eta\theta_1(\|A_1-A_2\|)+\eta^2L_1(\|A_1-A_2\|)\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\|A_1-A_2\|+\eta L_1(\|B_1-B_2\|)\cdot\|B_1-B_2\| \quad (1)$$

同理，有

$$\|(B_1-B_2)-\eta[C_2(A_1,B_1)-C_2(A_2,B_2)]\|$$
$$\leqslant\{1-2\eta\theta_2(\|B_1-B_2\|)+\eta^2L_2(\|B_1-B_2\|)\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\|B_1-B_2\|+\eta L_2(\|A_1-A_2\|)\cdot\|A_1-A_2\| \quad (2)$$

当 $a,b\in R^+$ 时，有 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$ 将(1)、(2)两式左右相加得：

$$\|F(A_1,B_1)-F(A_2,B_2)\|_1$$
$$\leqslant\sqrt{2}[2-2\eta\theta(\|A_1-A_2\|+\|B_1-B_2\|)+$$
$$\eta^2L(\|A_1-A_2\|+\|B_1-B_2\|)]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$(\|A_1-A_2\|+\|B_1-B_2\|)$$
$$+\eta L(\|A_1-A_2\|+\|B_1-B_2\|)\cdot$$
$$(\|A_1-A_2\|+\|B_1-B_2\|) \quad (3)$$

(3)中的 $\theta=\theta_1+\theta_2$，$L=L_1+L_2$。

从而

$$\|F(A_1,B_1)-F(A_2,B_2)\|_1$$
$$\leqslant\sqrt{2}[2-2\eta\theta(\|(A_1,B_1)-(A_2,B_2)\|_1)+$$
$$\eta^2L(\|(A_1,B_1)-(A_2,B_2)\|_1)]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\|(A_1,B_1)-(A_2,B_2)\|_1$$
$$+\eta L(\|(A_1,B_1)-(A_2,B_2)\|_1)\cdot$$
$$\|(A_1,B_1)-(A_2,B_2)\|_1$$

令 $\phi(\alpha)=\sqrt{2}[2-2\eta\theta(\alpha)+\eta^2L(\alpha)]^{\frac{1}{2}}\alpha+\eta L(\alpha)\alpha$

$$=\{\sqrt{2}[2-2\eta\theta(\alpha)+\eta^2L(\alpha)]^{\frac{1}{2}}+\eta L(\alpha)\}\alpha$$

根据已知条件，对任意 $\alpha\in[0,+\infty)$ 都有 $\phi(\alpha)<\alpha$。

根据引理 4，存在 $(A,B)\in\Lambda\times\Lambda$，使得

$$F((A,B))=(A,B)$$

即

$$P_{\Lambda}\left[A - \eta C_1(A,B)\right] = A$$

$$P_{\Lambda}\left[B - \eta C_2(A,B)\right] = B$$

所以,$(A,B) \in \Lambda \times \Lambda$ 就是相关运输流量. 根据上述讨论,(A,B) 也就是运输网络中流量成本达到最小时的流量分。

参 考 文 献:

[1] 耿茂华,彭 巍,胡树华. 超网络的兴起与衰退 [J]. 科研管理,2000,21(6):55-59.

[2] 王众托,王志平. 超网络初探 [J]. 管理学报,2008(1):1-8.

[3] 李晓强. 基于变分不等式的电子商务供应链超网络研究 [D]. 大连: 大连海事大学,2008.

[4] 万 英. 电力供应链管理研究 [J]. 交通运输系统工程与信息,2008(2):28-31.

[5] 黄海军. 城市交通网络平衡分析: 理论与实践 [M]. 北京: 人民出版社,1994.

[6] Daniele P A Maugeri, Oettli W. Time-dependent traffic equilibria [J]. J. Optim. Theory Appl., 1999, 103: 543-555.

[7] Anna Nagurney. Network Economics: A Variational Inequality Approach [M]. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[8] Bollobax B, Fulton W, Katok A, et al. Fixed Point Theory and Applications [M]. Cambridge University Press, 2001.

Application of Variational Inequalities in Transportation Networks

HUANG Yuan

(College of Economics, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China)

Abstract: Based on the definition of equilibrium and the equivalent variational inequalities, two different but related flows in transportation networks are analyzed, and then existence conditions of the relevant flows are put forward, i. e, the conditions on which cost of the flows in the transportation networks is the smallest.

Key words: transportation network; variational inequalities; uniformly monotone; uniformly Lipschitz continuity