第 24 卷第 6 期　四川理工学院学报(自然科学版)　Vol. 24 No. 6
2011 年 12 月　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0701-02

关于丢番图方程 $x^4 + dy^4 = z^2$

管训贵

(泰州师范高等专科学校数理信息学院,江苏 泰州 225300)

摘 要:利用分解法和无穷递降法研究了一类丢番图方程的解,结果证明了丢番图方程 $x^4 + dy^4 = z^2$,$\gcd(x,y) = 1$,这里 d 为整数且 $d \neq 0$,在 $d = 3^n$ 及 $n \equiv 3 \pmod 4$ 时,无正整数解。

关键词:高次丢番图方程;广义 *Fermat* 猜想;分解法;无穷递降法;正整数解

中图分类号:O156.7　文献标识码:A

1 主要结论

1995 年,*H. Darmon* 和 *A. Granville*[1] 提出了广义 *Fermat* 猜想:方程

$$x^p + y^q = z^r, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \ \gcd(x,y) = 1 \quad (1)$$

仅有 10 组正整数解

$1 + 2^3 = 3^2$

$2^5 + 7^2 = 3^4$

$7^3 + 13^2 = 2^9$

$2^7 + 17^3 = 71^2$

$3^5 + 11^4 = 122^2$

$17^7 + 76271^3 = 21063928^2$

$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$

$9262^3 + 15312283^2 = 113^7$

$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$

$33^8 + 1549034^2 = 15613^3$

1997 年,*Andrew Beal*[2] 进一步猜想:如果 p,q,r 均大于 2,则方程(1)没有正整数解。

1999 年,曹珍富[3] 证明了方程 $x^4 \pm y^4 = z^3$,$\gcd(x,y) = 1$ 没有正整数解。而 1993 年,汤健儿[4] 已经证明了 $x^3 + y^3 = z^4$,$\gcd(x,y) = 1$ 没有正整数解,故在 p,q,r 最大取到 4 时,*Beal* 猜想成立。从目前已有的工作来看,离彻底解决上述猜想还相差甚远。不过在探讨该问题的过程中需要用到丢番图方程

$$x^4 + dy^4 = z^2, \gcd(x,y) = 1 \quad (2)$$

这里 d 为非零整数。因此方程(2)也是一类基本而又重要的高次丢番图方程。

1967 年,*Mordell*[5] 利用分解因子法和无穷递降法证明了:若 p 为奇素数,则当

$d = p, p \equiv 7, 11 \pmod{16}$ 或 $d = 2p, p \equiv \pm 3 \pmod 8$ 或 $d = 4p, p \equiv \pm 3, -5 \pmod{16}$ 或 $d = -p, p \equiv \pm 3, -5 \pmod{16}$ 时,(2)没有正整数解。

本文研究了 $d = 3^n, n \equiv 3 \pmod 4$ 的情形,证明了以下结果:

定理 1 设 n 为正整数,$d = 3^n$,$n \equiv 3 \pmod 4$,则方程(2)没有正整数解。

2 关键性引理

设 p 为奇素数,m,x,y,z 为正整数,$p^m \equiv 11 \pmod{16}$。

引理 1 若 $2 \mid x$,$2 \nmid y$,$\gcd(x,y) = 1$,且满足

$$x^2 - y^2 = p^m z^4 \quad (3)$$

则 $y \equiv \pm 5 \pmod 8$。

证明 由 $2 \mid x$,$2 \nmid y$,及 $\gcd(x,y) = 1$ 知 $\gcd(x+y, x-y) = 1$。于是(3)式成为

$$x \pm y = p^m z_1^4, x \mp y = z_2^4, z = z_1 z_2 \quad (4)$$

这里 z_1, z_2 是满足 $\gcd(z_1, z_2) = 1$ 的正奇数。

由(4)的前两式得

$$\pm 2y = p^m z_1^4 - z_2^4 \quad (5)$$

对(5)式模 16 得

$$\pm 2y \equiv 11 - 1 \equiv 10 \pmod{16}$$

即 $y \equiv \pm 5 \pmod 8$。引理 1 证毕。

引理 2 若 $2 \nmid x$,$2 \nmid y$,$\gcd(x,y) = 1$,且满足

$$x^2 - y^4 = p^m z^4 \quad (6)$$

则一定存在满足 $\gcd(z_1, z_2) = 1$,$2z_1 z_2 = z$ 的正整数 z_1,

收稿日期:2011-10-26

基金项目:泰州师范高等专科学校重点课题资助项目(2010ASL09)

作者简介:管训贵(1963-),男,江苏兴化人,副教授,主要从事基础数论方面的研究,(E-mail)tzszgxg@126.com

z_2，使得

$$y^2 = z_2^4 - 4p^m z_1^4 \quad (7)$$

证明 由 $2 \nmid x$，$2 \nmid y$，及 $\gcd(x,y) = 1$ 知 $\gcd(x + y^2, x - y^2) = 2$。于是(6)式成为

$$x \pm y^2 = 2p^m z_1^4, x \mp y^2 = 8z_2^4, z = 2z_1 z_2 \quad (8)$$

或

$$x \pm y^2 = 8p^m z_1^4, x \mp y^2 = 2z_2^4, z = 2z_1 z_2 \quad (9)$$

这里 z_1，z_2 是满足 $\gcd(z_1, z_2) = 1$ 的正整数。

若(8)式成立，则由(8)的前两式得

$$\pm y^2 = p^m z_1^4 - 4z_2^4 \quad (10)$$

对(10)式模 4 知，仅可能有

$$-y^2 = p^m z_1^4 - 4z_2^4$$

于是

$$(2z_2^2 + y)(2z_2^2 - y) = p^m z_1^4 \quad (11)$$

易知 $\gcd(2z_2^2 + y, 2z_2^2 - y) = 1$，故(11)式给出

$$2z_2^2 \pm y = p^m s^4, 2z_2^2 \mp y = t^4, z_1 = st \quad (12)$$

这里 s，t 是满足 $\gcd(s,t) = 1$ 的正整数。

由(12)的前两式得

$$(2z_2)^2 - (t^2)^2 = p^m s^4, \gcd(s,t) = 1$$

根据引理 1，$t^2 \equiv \pm 5 \pmod 8$。但这是不可能的。

若(9)式成立，则由(9)的前两式得

$$\pm y^2 = 4p^m z_1^4 - z_2^4 \quad (13)$$

对(13)式模 4 知，仅可能有

$$-y^2 = 4p^m z_1^4 - z_2^4$$

即(7)式成立。引理 2 证毕。

3 定理的证明

用 *Fermat* 的无穷递降法。

假设 (x,y,z) 是(2)的一组正整数解，且满足 $\gcd(x,y) = 1$，z 是(2)的所有这样的正整数解中最小的一个。显然 $2 \nmid x$，否则 $2 \nmid y$，对(2)模 4 可得 $z^2 \equiv 3 \pmod 4$，矛盾。于是 y，z 一奇一偶。又 $n \equiv 3 \pmod 4$，故 $3^n \equiv 11 \pmod{16}$。将方程(2)改写成

$$z^2 - x^4 = 3^n y^4, \gcd(z,x) = 1 \quad (14)$$

情形Ⅰ 若 $2 \mid z$，$2 \nmid y$，则 $2 \nmid x$。由引理 1 知，$x^2 \equiv \pm 5 \pmod 8$，但 $x^2 \equiv 1 \pmod 8$，故不可能。

情形Ⅱ 若 $2 \nmid z$，$2 \mid y$，则 $2 \nmid x$。由引理 2 知

$$x^2 = y_2^4 - 4 \times 3^n y_1^4 \quad (15)$$

这里 y_1，y_2 是满足 $\gcd(y_1, y_2) = 1$，$2y_1 y_2 = y$ 的正整数。

由(15)式整理得

$$\frac{y_2^2 + x}{2} \cdot \frac{y_2^2 - x}{2} = 3^n y_1^4 \quad (16)$$

易知，$\gcd(\frac{y_2^2 + x}{2}, \frac{y_2^2 - x}{2}) = 1$，故(16)式给出

$$\frac{y_2^2 \pm x}{2} = 3^n s^4, \frac{y_2^2 \mp x}{2} = t^4, y_1 = st \quad (17)$$

这里 s，t 是满足 $\gcd(s,t) = 1$ 的正整数。

由(17)的前两式得

$$t^4 + 3^n s^4 = y_2^2 \quad (18)$$

(18)式给出方程(2)的一组满足 $\gcd(x,y) = 1$ 的正整数解 $(x,y,z) = (t,s,y_2)$。由于 $y_2 < y < z$，故与 z 的最小性矛盾。定理证毕。

值得一提的是：当 $d = 3^n$，$n \equiv 0 \pmod 4$ 时，方程(2)早为 *Fermat*[2] 用无穷递降法解决。由于 $x^4 + 3y^4 = z^2$，$\gcd(x,y) = 1$ 有正整数解 $(x,y,z) = (1,1,2)$；$x^4 + 9y^4 = z^2$，$\gcd(x,y) = 1$ 有正整数解 $(x,y,z) = (2,1,5)$，故 $d = 3^n$，$n \equiv 1,2 \pmod 4$ 的情形要比其它情形复杂得多，将另文讨论。

参考文献：

[1] Darmon H, Granville A. On the equations $Z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = cZ^r$ [J]. Bull London Math. Soc., 1995, 27: 513.

[2] Mauldin R. D. A generalization of Fermat's last theorem: The Beal conjecture and prize problem [J]. Notices of the Amer Math. Soc., 1997, 44(11): 1436.

[3] 曹珍富. 关于丢番图方程 $x^4 \pm y^4 = z^p$ [J]. 宁夏大学学报：自然科学版，1999，20(1)：18-21.

[4] 汤健儿. 不定方程 $x^3 + y^3 = z^2$ 与 $x^3 + y^3 = z^4$ [J]. 数学的实践与认识，1993(1)：90.

[5] Mordell L. J. On the equation $x^4 + dy^4 = z^2$ [J]. Q. J. Math. 1967, 18(2): 1-6.

[6] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 黑龙江：哈尔滨工业大学出版社，1989.

On the Diophantine Equation $x^4 + dy^4 = z^2$

GUAN Xun-gui

(School of Mathematics, Physics & Information Science, Taizhou Techers College, Taizhou 225300, China)

Abstract: Using decomposition method and method of infinite descent, the author considers a class of Diophantine equations. In this paper, we prove the Diophantine equation $x^4 + dy^4 = z^2$, with $gcd(x,y) = 1$, and provethat if $d = 3^n$ and $n \equiv 3 \pmod 4$, then it has no positive integer solution.

Key words: higher degree Diophantine equation; generalization of Fermat's conjecture; decomposition method; method of infinite descent; positive integer solution