文章编号:1673-1549(2011)05-0583-04

非线性分数阶微分系统边值问题正解的存在性

史小艺, 陈春香, 黄玲君

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要:研究了一类非线性分数阶微分系统边值问题正解的存在性,通过利用上下解方法以及 schauder 不动点定理,得到了该微分系统边值问题正解存在的充分条件。

关键词:非线性;分数阶微分系统;边值问题;上下解方法;正解;存在性

中图分类号:O175.8 **文献标识码**:A

引 言

分数阶微分系统是整数阶微分系统的延伸,在科学工程等各个领域都有着广泛的应用。文献[1-2]运用 schauder 不动点定理得到了一类分数阶微分系统解的存在性,我们知道 schauder 不动点定理不能保证得到的解是正解,然而具有实际意义的解大多是正解,文献[3]利用上下解方法得到了如下分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1, 3<\alpha\leqslant 4 \\ u(0)=u'(0)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性。

文献[4]同样利用上下解方法得到了如下微分系统边值问题

$$\begin{cases} -x''=f(t,y),\ -y''=g(t,x) \\ \alpha x(0)-\beta x'(0)=\delta x(1)+\gamma x'(1)=0 \\ y(0)=ay(\xi_1), y(1)=by(\xi_2) \end{cases}$$

正解的存在性。

受文献[4]启发,考虑非线性分数阶微分系统

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha}x(t)=f(t,y), 1<\alpha,\beta\leqslant 2, t\in(0,1) \\ -D_{0^+}^{\beta}y(t)=g(t,y) \\ x(0)=x(1)=y(0)=y(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性,其中

$f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty))$

$g\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty))$

1 预备知识和引理

定义 1 假设 $(x,y)\in C^2[0,1]\times C^2[0,1]$ 满足系统(1),对 $\forall t\in(0,1)$ 有 $x(t)>0$ 和 $y(t)>0$,则 (x,y) 是系统(1)的一个正解。

定义 2[5] 积分 $I_{0^+}^{s}f(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-s}}dt$ 是 Riemann-Liouville 型分数积分,其中 $x>0, s>0$,$\Gamma(s)$ 是 Euler Gamma 函数。

定义 3[5] 若 $0<f(x)<+\infty$,则 $D_{0^+}^{s}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-s)}(\frac{d}{dx})^n\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{s-n+1}}dt$ 是 Riemann-Liouville 型分数导数,其中 $n=[s]+1$,$[s]$ 表示 s 的整数部分。

令 $E=C[0,1]$ 是一个 Banach 空间,$\forall x\in E$ 且 $\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$。

令 $P=\{x\in C[0,1]:x(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}$,显然 P 是 E 的一个正规锥。文章都是在 E 中讨论的。

引理 1[5] 令 $\alpha>0$,微分方程 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)=0$ 有唯一解为:$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$,其中 $c_i\in R$,$i=1,2,\cdots,n$,n 是大于或等于 α 的最小整数。

引理 2[5] 令 $\alpha>0$,则 $I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$ 其中 $c_i\in R, i=1,2,\cdots,n$,n 是大于或等于 α 的最小整数。

引理 3[5] 若 $y\in C[0,1]$ 且 $y(t)\geqslant 0$,则分数阶边

收稿日期:2011-07-22
基金项目:中央高校基本科研业务费专项基金(2010LKSX06)
作者简介:史小艺(1986-),女,江苏沛县人,硕士生,主要从事图论方面的研究,(E-mail)shixiaoyi1988@126.com

值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, 0 < t < 1, 1 < \alpha \leqslant 2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

有唯一一个正解 $u(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s)\ y(s)ds$, 其中

$$G_\alpha(t,s) = \begin{cases} \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

显然对 $\forall t,s \in [0,1]$ 有 $G_\alpha(t,s) \geqslant 0$ 且 $G_\alpha(t,s) \leqslant G_\alpha(s,s)$。由引理3 知 $(x,y) \in C^2[0,1] \times C^2[0,1]$ 是系统(1)的解当且仅当 (x,y) 是下面非线性积分系统的解

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s) f(s,y(s))ds \\ y(t) = \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,x(s))ds \end{cases} \tag{2}$$

显然非线性系统(2)等价于下列非线性积分-微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} x(t) = -f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,x(s))\ ds) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

即算子方程

$$x(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s)\ f(s, \int_0^1 G_\beta(s,\tau) g(\tau, x(\tau))\ d\tau) ds$$

$t \in [0,1]$

定义一个非线性算子 $T: P \to P$

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s)\ f(s, \int_0^1 G_\beta(s,\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau) ds, t \in [0,1]$$

则系统(1)解的存在性等价于非线性算子 T 不动点的存在性。

假设 $\omega(t)$ 是 T 的一个不动点,则系统(1)的解为

$$\begin{cases} x(t) = \omega(t) \\ y(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s,\omega(s))ds\ , t \in [0,1] \end{cases}$$

引理4 若 $u(t)$ 是系统(2)的一个正解,则 $m\rho(t) \leqslant u(t) \leqslant M\rho(t)$, 其中 $\rho(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{t^{\alpha-1} - t^\alpha}{\alpha}\right)$, m, M 是常数。

证明 因为 $u(t) \in C^2[0,1]$, 所以 $\exists M' > 0$ 使得对 $t \in [0,1]$ 有 $|u(t)| \leqslant M'$。令

$$m = \min_{(t,u) \in [0,1] \times [0,M']} f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,\rho(s))ds)$$

$$M = \max_{(t,u) \in [0,1] \times [0,M']} f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,\rho(s))ds)$$

由引理3 知

$$m\int_0^1 G_\alpha(t,s)\ ds \leqslant u(t) =$$

$$\int_0^1 G_\alpha(t,s)\ f(s, \int_0^1 G_\beta(s,\tau) g(\tau,\rho(\tau)) d\tau) ds \leqslant$$

$$M\int_0^1 G_\alpha(t,s)\ ds$$

直接计算可得

$$\rho(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s)\ ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t^{\alpha-1} - t^\alpha}{\alpha}\right)$$

得证。

定义4 函数 $\alpha(t)$ 是方程(3)的下解,如果 $\alpha(t) \in C^2[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\alpha}\alpha(t) \leqslant f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,\alpha(s))\ ds), 1 < \alpha,\beta \leqslant 2, t \in [0,1] \\ \alpha(0) \leqslant 0, \alpha(1) \leqslant 0 \end{cases}$$

定义5 函数 $\beta(t)$ 是方程(3)的下解,如果 $\beta(t) \in C^2[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\alpha}\beta(t) \geqslant f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s) g(s,\beta(s))\ ds), 1 < \alpha,\beta \leqslant 2, t \in [0,1] \\ \beta(0) \geqslant 0, \beta(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

本文有以下假设:

$(H_1) f \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty))$, 对任一固定 $t \in [0,1]$, $f(t,y)$ 是 y 的不减函数, 对 $\forall k \in (0,1)$, 存在常数 $\mu > 0$, 对 $\forall (t,y) \in [0,1] \times [0,+\infty)$ 满足 $k^\mu f(t,y) \leqslant f(t,ky)$。

$(H_2) g \in C([0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty))$, 对任一固定 $t \in [0,1]$, $g(t,x)$ 是 x 的不减函数, 对 $\forall k \in (0,1)$, 存在常数 $\mu > 0$, 对 $\forall (t,x) \in [0,1] \times [0,+\infty)$ 满足 $k^\mu g(t,x) \leqslant g(t,kx)$。

2 主要结果

定理1 若 $f(t,y)$ 满足 (H_1) 以及 $g(t,x)$ 满足 (H_2), 则分数阶微分系统边值问题(1)存在一个 $C[0,1] \times C[0,1]$ 正解。

证明 先证明 $\alpha(t) = k_1 h(t)$, $\beta(t) = k_2 h(t)$ 分别是方程(3)的上下解,

$$0 < k_1 \leqslant \min\left\{\frac{1}{a_2}, (a_1)^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right\} k_2 \geqslant \max\left\{\frac{1}{a_1}, (a_2)^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right\}$$

$$a_1 = \min\{1, \inf f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\} > 0$$

$$a_2 = \max\{1, \max f(t, \int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\}$$

$$h(t) = \int_0^1 G_\alpha(t,s) f(s, \int_0^1 G_\beta(s,\tau) g(\tau,\rho(\tau)) d\tau) ds$$

由引理 3 知, $h(t)$ 是下列方程的一个正解

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t)+f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,x(s))\,ds)=0 \\ 0<t<1,1<\alpha,\beta\leqslant 2,x(0)=x(1)=0 \end{cases}$$

由引理 4 知

$$a_1\rho(t)\leqslant h(t)\leqslant a_2\rho(t),t\in[0,1]$$

即

$$0<k_1a_1\leqslant\frac{\alpha(t)}{\rho(t)}\leqslant k_1a_2\leqslant 1$$

$$0<\frac{1}{k_2a_2}\leqslant\frac{\rho(t)}{\beta(t)}\leqslant\frac{1}{k_2a_1}\leqslant 1$$

$$(k_1a_1)^\mu\geqslant k_1,(k_2a_2)^\mu\leqslant k_2$$

因此有

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\alpha(s))ds)=$$

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\frac{\alpha(s)}{\rho(s)}\cdot\rho(s))ds)\geqslant$$

$$f(t,(k_1a_1)^\mu\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\geqslant$$

$$f(t,k_1\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\geqslant$$

$$(k_1)^\mu f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)$$

$$k_2f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)=$$

$$k_2f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\frac{\rho(s)}{\beta(s)}\cdot\beta(s))ds)\geqslant$$

$$k_2f(t,(k_2a_2)^{-\mu}\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)\geqslant$$

$$k_2f(t,(k_2)^{-1}\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)\geqslant$$

$$k_2\cdot(k_2)^{-\mu}f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)\geqslant$$

$$(k_2)^\mu\cdot(k_2)^{-\mu}f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)=$$

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)$$

则有

$$-D_{0^+}^{\alpha}\alpha(t)=k_1f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\leqslant$$

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\alpha(s))ds)$$

$$D_{0^+}^{\alpha}\beta(t)=k_2f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\rho(s))ds)\geqslant$$

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)\ g(s,\beta(s))ds)$$

因为 $\alpha(t)=k_1h(t)$, $\beta(t)=k_2h(t)$ 满足系统(5)的边界条件,所以 $\alpha(t)=k_1h(t)$, $\beta(t)=k_2h(t)$ 分别是方程(3)的下解和上解。

下面证明边值问题有一个正解。

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}x(t)=-F(t,x(t)),0<t<1,1<\alpha\leqslant 2 \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases}\tag{4}$$

其中

$$F(t,x(t))=$$

$$\begin{cases} f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\alpha(s))ds\ ),x(t)<\alpha(t) \\ f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,x(s))ds\ ),\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t) \\ f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\beta(s))ds\ ),\alpha(t)>\beta(t) \end{cases}\tag{5}$$

定义算子 $A:C^2[0,1]\to C^2[0,1]$ 如下:

$$Ax(t)=\int_0^1 G_\alpha(t,s)F(s,x(s))ds$$

显然算子 A 的不动点即为系统(4)的解。

首先,因为 f,g 和 $G(t,s)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的,所以算子 A 是连续的。由系统(5)及 $f(t,y)$ 是 y 的不减函数, $g(t,x)$ 是 x 的不减函数知:

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\alpha(s))ds\ )\leqslant$$

$$F(t,x(t))\leqslant$$

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\beta(s))ds\ )$$

所以存在一个正数 M' 使得 $|F(t,x(t))|\leqslant M'$, 所以算子 A 是一致有界的。

另一方面由于 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是连续的,所以它在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是一致连续的。对所有的 $x(t)\in C^2[0,1]$ 及 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ 有

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)|\leqslant$$

$$\int_0^1|G_\alpha(t_1,s)-G_\alpha(t_2,s)|f(s,\int_0^1 G_\beta(s,\tau)g(\tau,x(\tau))d\tau\ )ds\leqslant$$

$$|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|f(s,\int_0^1 f(s,\int_0^1 G_\beta(s,\tau)g(\tau,\beta(\tau))d\tau\ ))ds$$

所以算子 A 是等度连续的。

由 Ascoli – Arzela 定理知 A 是紧算子。由 Schauder 不动点定理知 A 有一个不动点 x^*, 即 $Ax^*=x^*$, 即系统(5)有一个解。

若要证明方程(3)有一个正解,只需证明 $\alpha(t)\leqslant$

$x^{*}(t) \leqslant \beta(t), t \in [0,1]$。

令 $z(t) = \beta(t) - x^{*}(t), t \in [0,1]$，设 $x^{*}(t)$ 是系统(4)的一个解，由 $f(t,y)$ 是 y 的不减函数，$g(t,x)$ 是 x 的不减函数知：

$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\alpha(s))ds) \leqslant$$
$$F(t,x^{*}(t)) \leqslant$$
$$f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\beta(s))ds)$$

其中 $t \in [0,1]$，则

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\alpha} z(t) \geqslant f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,\beta(s))ds) - \\ f(t,\int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,x^{*}(s))ds) \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}$$

由引理 3 知 $z(t) \geqslant 0$，即 $x^{*}(t) \leqslant \beta(t), t \in [0,1]$，同理可得 $\alpha(t) \leqslant x^{*}(t), t \in [0,1]$，所以 $x^{*}(t)$ 是方程(3)的一个正解，即微分系统(1)的解为

$$\begin{cases} x(t) = x^{*}(t) \\ y(t) = \int_0^1 G_\beta(t,s)g(s,x^{*}(s))ds, t \in [0,1] \end{cases}$$

由此完成定理 1 的证明。

参 考 文 献：

[1] 丰文泉,孙 书.非线性分数阶微分系统解的存在性[J].济南大学学报,2011,25(3):319-321.

[2] 苏新卫.分数阶微分方程耦合系统边值问题解的存在性[J].工程数学学报,2009,26(1):133-137.

[3] Liang Sihua,Zhang Jihui.Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation[J].Nonlinear Anal.,2009,71:5545-5550.

[4] Zhaang Xinguang,Liu Lishan.A necessary and sufficient condition of positive solutions for nonlinear singular differential systems with four-point boundary conditions[J]. Appl.Math.Comput,2010,215:262-270.

[5] Bai Z,Lü H.Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. J. Math.Anal.Appl.,2005,311:495-505.

Existence of Solution to Boundary Value Problems for a System of Nonlinear Fractional Differential Equations

SHI Xiaoyi[1], *CHEN Chun-xiang*[1], *HUANG Ling-jun*[1]

(College of Sciences, China University of Mining & Technology, Jiangsu 221116, China)

Abstract: The existence of solution to boundary value problems for a system of nonlinear fractional differential equations is investigated. Based upon upper and lower solution method and the fixed-point theorem sufficient condition of the problem is obtained.

Key words: nonlinear; fractional differential equations system; boundary-value problem; upper and lower solution method; positive solution; existence