文章编号:1673-1549(2011)05-0587-03

四阶特征值问题正解的存在性

张 宁, 史小艺, 杨 丛

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要:文章讨论了四阶常微分方程特征值问题的正解的存在性,在一定条件下,利用不动点指数和锥拉伸与锥压缩不动点定理,得到了该四阶特征值问题正解存在的充分条件。

关键词:四阶特征值问题;锥拉伸与锥压缩不动点定理;正解;存在性

中图分类号:O175.9 **文献标识码**:A

引 言

弹性梁的形变在数学上是由四阶常微分方程 $\frac{d^4x}{dt^4}=f(t,x,x'')$ 来描述的。多年来,国内外许多学者对该方程的边值问题解的存在性和唯一性方面进行了广泛的研究。对 f 含有弯曲矩 u'' 的一般情形,文献[1-3]中,对 f 的增长阶作了较强的限制,或者要求 f 满足一定的单调性条件。对 f 不含弯矩形 u'' 的特殊情形已有深入研究[4-5],然而对非线性方程的特征值问题的研究不多。

本文研究了带两个参数四阶特征值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}+\beta y''-\alpha y=\lambda\varphi(x)f(x,y),x\in(0,1),\lambda>0 \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性。其中假设条件如下:

(a):$f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续;$\varphi:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续,且 $\varphi(t)>K>0$ (K 常数)。

(b):$\alpha,\beta\in R$ 满足 $\beta\leqslant 2\pi^2,\alpha\geqslant-\frac{\beta^2}{4},\frac{\alpha}{\pi^4}+\frac{\beta}{\pi^2}\leqslant 1$。

(c):$f(x,y)$ 对于所有的 $x\in[0,1]$ 关于 y 非减。

(d):对于所有的 $x\in[0,1]$,$f(x,0)>c>0$,其中 c 是一个数。

(e):$f_\infty=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{f(x,y)}{y}=\infty$ 对于任意的 $x\in[0,1]$ 成立。

利用锥拉伸和锥拉伸不动点定理,证明了问题(1)正解的存在性。

1 预备知识和引理

设 $r\in R$, 考虑线性二阶边值问题:

$$-y''+ry=0,y(0)=y(1)=0 \tag{2}$$

显然当 $r>-\pi^2$ 时,方程(2)没有非零解,故存在 Green 函数,记为 $G_r(x,s)(0\leqslant x,s\leqslant 1)$。取 E 为 $C[0,1]$ 按范数 $\|y\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|y(x)|$ 构成的 Banach 空间,令 r_1,r_2 是多项式 $P(r)=r^2+\beta r-\alpha=0$ 的两个根。即

$$r_1=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha}}{2},r_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha}}{2}$$

由于(b),易证 $r_2\geqslant r_1>-\pi^2$。令 $\omega_i=\sqrt{|r_i|},r=1,2$,

$$G_i(x,s)=\begin{cases} \begin{cases} \frac{\sin\omega_i x\sin\omega_i(1-s)}{\omega_i\sin\omega_i},0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1 \\ \frac{\sin\omega_i s\sin\omega_i(1-x)}{\omega_i\sin\omega_i},0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} ,-\pi^2<r_i<0 \\ \begin{cases} x(1-s),0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1 \\ s(1-x),0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} ,r_i=0 \\ \begin{cases} \frac{\sinh\omega_i x\sinh\omega_i(1-s)}{\omega_i\sin\omega_i},0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1 \\ \frac{\sinh\omega_i s\sinh\omega_i(1-x)}{\omega_i\sinh\omega_i},0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} ,r_i>0 \end{cases}$$

从 $G_i(x,s)$ 的表达式上可以发现对于任意的 $x,s\in(0,1)$ 都有 $G_i(x,s)>0$。

引理 1[6] 设(a),(b)成立,则对任意的 $g\in E$, 问题

收稿日期:2011-08-05

基金项目:国家自然科学基金项目(10771212)

作者简介:张 宁(1985-),女,山西晋城人,硕士生,主要从事常微分方程方面的研究,(E-mail) ninging_love@163.com

$$\begin{cases} y^{(4)} + \beta y'' - \alpha y = g(x), x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

存在唯一解

$$y(x) = \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) g(s) ds d\tau \tag{4}$$

特别地,当 $g(x) \geqslant 0$ 时, $y(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$。

令当 $-\pi^2 < r_1 < 0$ 时,

$$\varphi_1(x) = \frac{\sin\omega_1 x}{\sin\omega_1}, \varphi_2(x) = \frac{\sin\omega_1(1-x)}{\sin\omega_1}$$

当 $r_1 = 0$ 时,

$$\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = 1 - x$$

当 $r_1 > 0$ 时,

$$\varphi_1(x) = \frac{\sinh\omega_1 x}{\sinh\omega_1}, \varphi_2(x) = \frac{\sinh\omega_1(1-x)}{\sinh\omega_1}$$

当 $-\pi^2 < r_1 < 0$ 时,

$$\psi_1(x) = \frac{\sin\omega_2 x}{\sin\omega_2}, \psi_2(x) = \frac{\sin\omega_2(1-x)}{\sin\omega_2}$$

当 $r_1 = 0$ 时,

$$\psi_1(x) = x, \psi_2(x) = 1 - x$$

当 $r_1 > 0$ 时,

$$\psi_1(x) = \frac{\sinh\omega_2 x}{\sinh\omega_2}, \psi_2(x) = \frac{\sinh\omega_2(1-x)}{\sinh\omega_2}$$

$$h(x) = \min\left\{\frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}, \frac{\psi_2(x)}{\|\psi_2(x)\|}\right\}, x \in [0,1]$$

引理 2[6] 如果存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $\|y\| = y(x_0)$, 则 $\dfrac{G_2(x,s)}{G_2(x_0,s)} \geqslant h(x), x \in (0,1), s \in (0,1)$。

引理 3[6] 设(a),(b)成立,则对任意 $g \in E, g \geqslant 0$, 问题(3)的唯一解 y 满足

$$y(x) \geqslant \|y\| h(x), x \in [0,1]$$

令 $r = \min\{h(x): x \in [\delta, 1-\delta]\}, \delta \in (0, \frac{1}{2})$, 易知 $r > 0$, 唯一解 y 满足 $y(x) \geqslant r\|y\|, x \in [\delta, 1-\delta]$。

令 $P = \{y \in P: y \geqslant 0, \min\limits_{\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta}\{y(x)\} \geqslant r\|y\|\}$, 则 P 是 E 的一个锥。

定义算子:

$$A_\lambda: A_\lambda y(x) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) \varphi(s) f(s, y(s)) ds d\tau$$

引理 4[6] $A_\lambda(P) \subset P$ 且 $A_\lambda: P \to P$ 全连续的。

引理 5[6] 如果(a)-(e)成立,令

$$S_\lambda = \{y \in P: A_\lambda y = y, \lambda \in I\}$$

其中 $I \subset [a, +\infty)$, $a > 0$ 是一个常数。则存在常数 C_I 使得 $\|y\| < C_I$ 对于所有的 $y \in S_\lambda$ 成立。

引理 6[6] 如果(a)-(e)成立,令 $\Lambda = \{\lambda > 0: A_\lambda$ 在 P 上至少有一个不动点$\}$, 则 Λ 有界。并且设 $\bar{\lambda} = \sup\Lambda$, 则 $\Lambda = (0, \bar{\lambda}]$。

证明 (1)假设存在 A_λ 对应于 λ_n 的不动点序列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$。由引理 5,存在 $C > 0$ 使得 $\|y_n\| < C. (n = 0,1,2,\ldots)$。由(c)和(d),取 $e > 0$, 使得 $f(x,0) > eC$, 故 $f(x, y_n) > eC, x \in [0,1]$。

令 $m = \min\limits_{x\in[0,1]} y(x) > 0$, 有

$$y_n(x) = \lambda_n \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) \varphi(s) f(s, y_n(s)) ds d\tau >$$

$$\lambda_n eCK \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) ds d\tau =$$

$$\lambda_n eCKy(x) \geqslant \lambda_n eCKm$$

即 $C \geqslant \|y_n\| \geqslant y_n \geqslant \lambda_n eCKm$, 故 $\lambda_n \leqslant \dfrac{1}{eKm}$, 矛盾,故 Λ 有界。

(2)不妨设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个非减序列,令 $\bar{\lambda} = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$, 设 $y_n \in P$ 是 A_{λ_n} 对应于 $\lambda_n (n = 1,2,\ldots)$ 的不动点。由引理5, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致有界,故存在收敛的子列,不妨仍记为 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, 收敛到 $\bar{y} \in P$,

$$y_n = \lambda_n \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) \varphi(s) f(s, y_n(s)) ds d\tau$$

等式两边同时取当 $n \to \infty$ 时的极限,

$$\bar{y} = \bar{\lambda} \int_0^1 \int_0^1 G_2(x,\tau) G_1(\tau,s) \varphi(s) f(s, \bar{y}) ds d\tau$$

故 $A_{\bar{\lambda}}$ 有一个不动点 $\bar{y}$, 故 $\bar{\lambda} \in \Lambda$。

引理 7[6] 设 E 为 Banach 空间, P 是一个锥。Ω 是 E 的一个有界开集,其边界为 $\partial\Omega$, $\theta \in \Omega$, $A: P \cap \bar{\Omega} \to P$ 是全连续算子。如果对于任意一个 $y \in \partial\Omega \cap P$ 和 $0 < k \leqslant 1$ 使得 $kAu \neq y$, 则不动点指数 $i(A, P \cap \Omega, P) = 1$。

引理 8[7] (锥拉伸或锥压缩映射的不动点定理):设 E 为 Banach 空间, $P > E$ 为闭凸锥。Ω_1, Ω_2 为 E 中的开集, $\theta \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$。$Q: P \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to P$ 为全连续映射。若下列条件之一成立:

(1) $\|Qu\| \leqslant \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_1$

$\|Qu\| \geqslant \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_2$

(2) $\|Qu\| \geqslant \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_1$

$\|Qu\| \leqslant \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_2$

则 Q 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中必存在不动点。

2 主要结果

定理 1 如果(a)-(e)成立,那么存在 $\lambda^* > 0$ 使得

(1) $\lambda > \lambda^*$ 时,问题(1)没有正解;

(2) $\lambda = \lambda^*$ 时,问题(1)至少有一个正解;

(3) $0 < \lambda > \lambda^*$ 时,问题(1)至少有两个正解。

证明 (1)令 $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0: A_\lambda$ 在 P 上至少有一个不动点$\}$。根据引理6,显然任意的 $\lambda > \lambda^*$, 问题(1)没有正解。

(2)有引理6 可知,结论成立。

(3)令 $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0: A_\lambda$ 在 P 上至少有一个不动点$\}$。由引理6算子 A_{λ^*} 在 P 上有不动点。

由于$f(x,y)$ 在$[0,1]\times[0,+\infty)$上一致连续。任取一个 $\lambda \in (0,\lambda^*)$,则存在 $\delta > 0$,使得对任意的 $x \in [0,1]$,有 $f(x,y_{\lambda^*}+\delta) - f(x,y_{\lambda^*}) \leqslant f(x,0)(\frac{\lambda^*}{\lambda}-1)$。即

$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y_{\lambda^*}(s)+\delta)dsd\tau -$$
$$\lambda^*\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y_{\lambda^*}(s))dsd\tau =$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)(f(s,y_{\lambda^*}(s)+\delta) -$$
$$f(s,y_{\lambda^*}(s))dsd\tau -$$
$$(\lambda^*-\lambda)\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)$$
$$f(s,y_{\lambda^*}(s))dsd\tau \leqslant (\lambda^*-\lambda)$$
$$\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,0)dsd\tau -$$
$$(\lambda^*-\lambda)\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)$$
$$f(s,y_{\lambda^*}(s))dsd\tau = (\lambda^*-\lambda)\int_0^1\int_0^1 G_2(x,\tau)$$
$$G_1(\tau,s)\varphi(s)(f(s,0)-f(s,y_{\lambda^*}(s))dsd\tau < 0$$

则对算子 A_λ 知:

$$A_\lambda(y_{\lambda^*}+\delta) \leqslant A_{\lambda^*}(y_{\lambda^*}) = y_{\lambda^*} < y_{\lambda^*}+\delta$$

令 $\overline{\Omega_1} = \{y \in E: -\delta < y < y_{\lambda^*}+\delta\}$,则 $\overline{\Omega_1}$ 是 E 的有界开集,$\theta \in \overline{\Omega_1}$,$A_\lambda: P\cap\overline{\Omega_1}\to P$ 是全连续算子。则对 $k > 1$ 和 $y \in P\cap\partial\overline{\Omega_1}$,$A_\lambda y \neq ky$。令 $y \in P\cap\partial\Omega_1$,则存在 $x_0 \in [0,1]$,使得 $y(x_0) = \|y\| = y_{\lambda^*}(x_0)+\delta$。则有

$$(A_\lambda y)(x_0) =$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y(s))dsd\tau =$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y_{\lambda^*}(s)+\delta)dsd\tau <$$
$$y_{\lambda^*}(x_0)+\delta = y(x_0) < ky(x_0)$$

由引理7知 $i(A_\lambda,P\cap\Omega_1,P) = 1$,知 A_λ 在 $P\cap\Omega_1$ 中有一个不动点。由条件(e),令 $0 < y(x_0) < q$,满足:对任意的 $y > q$,有 $f(x,y) \geqslant my$,其中 $0 < \gamma < 1$,

$$m > (\lambda\gamma\int_0^1\int_\delta^{1-\delta} G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y(s))dsd\tau)^{-1}$$

令 $R = \frac{q}{r}$,$\Omega_2 = \{y \in P, \|y\| < R\}$,则 $A_\lambda: \overline{P_R}\to P$ 全连续。故对任意的 $x \in [0,1]$,$y \in P\cap\partial\Omega_2$,

$$(A_\lambda y)(x_0) =$$
$$\lambda\int_0^1\int_0^1 G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y(s))dsd\tau >$$
$$\lambda\int_0^1\int_\delta^{1-\delta} G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)f(s,y(s))dsd\tau \geqslant$$
$$m\lambda\gamma y\int_0^1\int_\delta^{1-\delta} G_2(x_0,\tau)G_1(\tau,s)\varphi(s)dsd\tau > \|y\|$$

由锥拉伸或锥压缩映射的不动点定理:A_λ 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中必存在不动点。故 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时,A_λ 在 $P\cap\Omega_1$ 中有一个不动点,在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中有另外一个不动点,即问题(1)至少有两个正解。

参 考 文 献:

[1] Aftabizadeh A R.Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems[J].J.Math.Anal. appl.1986,116:415-426.

[2] Yang Y.Fourth-order two-point boundary Value Problem [J].J.Proc.Amer.Math.Soc.1988,104:175-180.

[3] De Coster C, Fabry C, Munyamarere F. Nonresonance conditions for fourth-order non-liner boundary value problems, internat [J], J. Math. Math. Sci, 1994, 17: 725-740.

[4] Gupta C P.Exixtence and uniqueness Results for a bending of an elastic beam equations at Resonance[J].J. Math.Anal.Appl.1988,135:208-225.

[5] Ma R Y,Wang H Y.On the Existence of Positive Solutions of Fourth-order Ordinary Differential Equation[J]. Appl.Anal,1995,59:225-231.

[6] 连兴业.一类四阶微分方程特征值问题正解的存在性和唯一性[D].吉林:吉林大学,2009.

[7] 郭大钧,孙经先,刘兆理.非线性常微分方程泛函方法[M].山东:山东科学技术出版社,2006.

Existence of Positive Solutions of a Fourth-order Eigenvalue Problems

ZHANG Ning, *SHI Xiao-yi*, *YANG Cong*

(College of Sciences, China University of Mining & Technology, Jiangsu 221116, China)

Abstract: This paper discusses the existence of positive solutions of a fourth-order ordinary differential equation eigenvalue problems. In certain conditions, sufficient condition of the problem is obtained by applying fixed point index and the fixed point theorem of cone extension or compression.

Key words: fourth-order eigenvalue problems; the fixed point theorem of cone extension or compression; positive solution; existence