第24卷第6期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 6
2011年12月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0719-03

Baer环和p. p. 环的Ore扩张

何建伟,郭莉琴,邵海琴,杨随义,王力梅

(天水师范学院数学与统计学院,甘肃　天水　741001)

摘　要:得到了Armendariz性与左右零化子之间的两个联系,并将其推广到(α,δ)-斜Armendariz环上,讨论了(α,δ)-斜Armendariz环中零化子的性质。由于其自身的特点,关于右零化子的结论与左零化子的结论有所不同。用其中一个推广讨论了Ore扩张的Baer性与p. p. 性,得到了新条件下Baer环和p. p. 环的Ore扩张。

关键词:(α,δ)-斜Armendariz环;零化子;Ore扩张;Baer环;p. p. 环

中图分类号:O153. 3　　文献标识码:A

引　言

文中所有环含单位元. Armendariz在研究Baer环的扩张中注意到reduced环满足这样的性质:对$R[x]$中任意两个多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$,若$f(x)g(x)=0$,则对任意整数$0\leqslant i\leqslant n$,$0\leqslant j\leqslant m$,有$a_ib_j=0$. Rege和Chhawchharia称具有这种性质的环为Armendariz环. 对Armendariz环的研究今年来有许多结果,参见文献[1]、文献[2]、文献[3]中得到Armendariz环的一种等价刻画,即。

结论1　设R是一个环,对$R[x]$中任意元素$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$,令$C_f=\{a_1,\cdots,a_n\}$. 对$V\subseteq R[x]$,令$C_V=\bigcup_{f\in V}C_f$. 以下等价:

1) R是Armendariz环;

2) $rAnn_R(2^R)\to rAnn_{R[x]}(2^{R[x]})$;$A\to AR[x]$是双射;

3) $lAnn_R(2^R)\to lAnn_{R[x]}(2^{R[x]})$;$B\to R[x]B$是双射;

4) $\forall g\in R[x]$,$lAnn_{R[x]}(g)\subseteq R[x]lAnn_R(C_g)=lAnn_{R[x]}(C_g)$;

5) $\forall V\subseteq R[x]$,$lAnn_{R[x]}(V)\subseteq R[x]lAnn_R(C_V)=lAnn_{R[x]}(C_V)$。

这解释了为什么Armendariz环能保持Bear性和p. p. 性。因此,Bear性和p. p. 性的推广关键是能否得到相应扩张环上类似结论1的结果。结论1中的(4),(5)两条原文没有,其等价性易证。设R是一个环,α是R上的一个自同态,由文献[4],称R为α-斜Armendariz环,如果对$R[x;\alpha]$中任意两个多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$,若$f(x)g(x)=0$,则对任意整数$0\leqslant i\leqslant n$,$0\leqslant j\leqslant m$,有$a_i\alpha^i(b_j)=0$。文献[5]将结论1推广到$\alpha$-斜Armendariz环。设$\delta$是$R$上的一个加法映射,使得对$R$中任意元素$a$,$b$,有$\delta(ab)=\delta(a)b+(a)\delta(b)$。记$R[x;\alpha,\delta]$为Ore扩张,其中元素为$R$上的多项式,加法按多项式相加,乘法由$xa=\alpha(a)x+\delta(a)$得到。文献[6]中称$R$为$(\alpha,\delta)$-斜Armendariz环,如果对$R[x;\alpha,\delta]$中任意两个多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$,若$f(x)g(x)=0$,则对任意整数$0\leqslant i\leqslant n$,$0\leqslant j\leqslant m$有$a_ix^ib_jx^j=0$。文献[6]将结论1推广到$(\alpha,\delta)$-斜Armendariz环,此时$\alpha$是环$R$的自同构。当$\delta=0$时,$(\alpha,\delta)$-斜Armendariz环就是$\alpha$-斜Armendariz环。

1　主要结论

以下我们将结论1推广到(α,δ)-斜Armendariz环上,并只要求α为自同态且$\alpha(1)=1$。

命题1　以下等价:

1) 环R满足比(α,δ)-斜Armendariz性弱的性质

收稿日期:2011-10-26

基金项目:天水师范学院中青年教师科研资助项目(TSA1013)

作者简介:何建伟(1983-),男,甘肃礼县人,讲师,硕士,主要从事环理论方面的研究,(E-mail)he_jw@163. com

即:对 $R[x;\alpha,\delta]$ 中任意两个多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$,若 $f(x)g(x)=0$,则对任意整数 $0\leqslant j\leqslant m$,有 $fb_j=0$;

2) $\forall g\in R[x;\alpha,\delta]$,$lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(g)\subseteq lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_g)$;

3) $\forall V\subseteq R[x;\alpha,\delta]$,$lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(V)\subseteq lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_V)$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 若 $f\in lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(g)$,即 $fg=0$,则对任意 $b_j\in C_g$,$fb_j=0$,故 $f\in lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_g)$. 2) $\Rightarrow$ 1) 若 $fg=0$,则 $f\in lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(g)\subseteq lAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_g)$,即 $fb_j=0$. 3) $\Leftrightarrow$ 2) 易证。

取 $\delta=0$,则有以下推论。

推论 1 以下等价:

1) R 为 α -斜 Armendariz 环;

2) $\forall g\in R[x;\alpha]$,$lAnn_{R[x;\alpha]}(g)\subseteq lAnn_{R[x;\alpha]}(C_g)$;

3) $\forall V\subseteq R[x;\alpha]$,$lAnn_{R[x;\alpha]}(V)\subseteq lAnn_{R[x;\alpha]}(C_V)$。

对右零化子有下述结论。

命题 2 以下等价。

1) R 为 (α,δ) -斜 Armendariz 环且对任意 i,$ax^ib=0\Leftrightarrow ab=0$;

2) $\forall f\in R[x;\alpha,\delta]$,$rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(f)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_f)$;

3) $\forall V\subseteq R[x;\alpha,\delta]$,$rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(V)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_V)$。

证明 令

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$。

1) $\Rightarrow$ 2) $g\in rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(f)\Leftrightarrow fg=0\Leftrightarrow$ 对任意 i,j,$a_ix^ib_jx^j=0\Leftrightarrow$ 对任意 i,j,$a_ib_j=0\Leftrightarrow$ 对任意 i,$a_ig=0\Leftrightarrow g\in rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_f)$。

2) $\Rightarrow$ 1) $ab=0\Leftrightarrow b\in rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_{ax^n})=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(ax^n)\Leftrightarrow ax^nb=0$. 若 $fg=0$,则 $g\in rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(f)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_f)$,故对任意 i,$a_ig=0$,则对任意 i,j,$a_ib_j=0$,故 $a_ix^ib_jx^j=0$。

3) $\Leftrightarrow$ 2) 易证。

文献 [6] 在 α 是自同构时得到 R 是 α -斜 Armendariz 环当且仅当对任意 $V\subseteq R[x;\alpha]$ 有 $rAnn_{R[x;\alpha]}(V)=rAnn_{R[x;\alpha]}(\bigcup_{f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in V}\{\alpha^{-i}(a_i)\mid i=0,1,\cdots,n\})$。取命题 2 中 δ 为 0,我们得到。

推论 2 以下等价:

1) R 为 α -斜 Armendariz 环且 $a\alpha(b)=0\Leftrightarrow ab=0$;

2) $\forall f\in \mathbf{R}[x;\alpha]$,$rAnn_{R[x;\alpha]}(f)=rAnn_{R[x;\alpha]}(C_f)$;

3) $\forall V\subseteq R[x;\alpha]$,$rAnn_{R[x;\alpha]}(V)=rAnn_{R[x;\alpha]}(C_V)$。

2 Baer 环和 p. p. 环的 Ore 扩张

称环 R 是 Baer 环,若 R 的每个非空子集的右零化子都由一个幂等元生成。称环 R 为左(右) p. p. 环,如果 R 的每个非零元的左(右)零化子都由一个幂等元生成。如果一个环既是左 p. p. 环又是右 p. p. 环,则称其为 p. p. 环。由文献 [6] 知,设 α 是 R 上的单同态且 δ 是 R 上的一个 α -导数,若 R 是 $(\alpha;\delta)$ -斜 Armendariz 环,则 R 是 Baer 环当且仅当 $R[x;\alpha,\delta]$ 是 Baer 环,对 p. p. 环也得到了同样结论. 下面用命题 1 和命题 2 讨论 Ore 扩张的 Baer 性与 p. p. 性。我们把单同态的条件换成"对任意 i,$ax^ib=0\Leftrightarrow ab=0$",则有下述结论。

命题 3 设 R 为 $(\alpha;\delta)$ -斜 Armendariz 环且对任意 i,$ax^ib=0\Leftrightarrow ab=0$。则 R 为 Baer 环当且仅当 $R[x;\alpha,\delta]$ 为 Baer 环。

证明 ($\Rightarrow$) 对任意 $V\subseteq R[x;\alpha,\delta]$,则存在幂等元 $e\in R$,使 $rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(V)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_V)=rAnn_R(C_V)R[x;\alpha,\delta]=eRR[x;\alpha,\delta]=eR[x;\alpha,\delta]$。

($\Leftarrow$) 对任意 $U\subseteq R$,由文献 [6] 的引理 5 知存在幂等元 $e\in R$,使 $rAnn_R(U)=R\cap rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(U)=R\cap eR[x;\alpha,\delta]=eR$。

命题 4 设 R 为 $(\alpha;\delta)$ -斜 Armendariz 环且对任意 i,$ax^ib=0\Leftrightarrow ab=0$. 则 R 为 p. p. 环当且仅当 $R[x;\alpha,\delta]$ 为 p. p. 环。

证明 ($\Rightarrow$) 对任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\in R[x;\alpha,\delta]$,$i=1,2,\cdots,m$,分别存在幂等元 $e_i\in R$,使 $rAnn_R(a_i)=e_iR$。设 $e=e_1e_2\cdots e_m$,由文献 [6] 的定理 12 知 $R[x;\alpha,\delta]$ 为 abelian 环。故 e 为 $R[x;\alpha,\delta]$ 中的幂等元,且 $rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(f)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(C_f)=rAnn_R(C_f)R[x;\alpha,\delta]=eRR[x;\alpha,\delta]=eR[x;\alpha,\delta]$。

($\Leftarrow$) 对任意 $a\in R$,存在 $R[x;\alpha,\delta]$ 中幂等元 e 使 $rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(a)=eR[x;\alpha,\delta]$,由文献 [6] 引理 5 知 $e\in R$。则 $rAnn_R(a)=rAnn_{R[x;\alpha,\delta]}(a)\cap R=eR[x;\alpha,\delta]\cap R=eR$。

由文献 [7],称 R 为 α -rigid 环如果对任意 $r\in R$,$r\alpha(r)=0$ 可推出 $r=0$。对 Armendariz 环的讨论还可见文献 [8]、文献 [9]、文献 [10]。由文献 [11] 的引理 4,α -rigid 环满足推论 2。下面说明推论 2 的条件 1 与 α -rigid 是有区别的,即满足推论 2 的环不一定是 α -rigid 环且对 α 的单满性不做要求。

例 1 设 R 为 Armendariz 环,$\alpha:R\to R$ 为自同态,令

$$S=\left\{\begin{pmatrix}(0,r_1) & (r_2,0)\\ 0 & (0,r_3)\end{pmatrix}\middle| r_1,r_2,r_3\in R\right\}$$

则 S 为 $T_2(R\times R)$ 的子环。定义

$$\bar{\alpha}: S\to S$$

$$\begin{pmatrix}(0,r_1) & (r_2,0)\\ 0 & (0,r_3)\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}(0,r_1) & (\alpha(r_2),0)\\ 0 & (0,r_3)\end{pmatrix}$$

则 $\bar{\alpha}$ 为 S 上的自同态. 对 $0\neq r_1\in R$,

$$\begin{pmatrix}(0,0) & (r_1,0)\\ 0 & (0,0)\end{pmatrix}\bar{\alpha}\left[\begin{pmatrix}(0,0) & (r_1,0)\\ 0 & (0,0)\end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix}(0,0) & (r_1,0)\\ 0 & (0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(0,0) & (\alpha(r_1),0)\\ 0 & (0,0)\end{pmatrix}=0$$

但

$$\begin{pmatrix}(0,0) & (r_1,0)\\ 0 & (0,0)\end{pmatrix}\neq 0$$

因此 S 不是 $\bar{\alpha}$ - rigid 环. 易证对任意 $a,b\in S$, $ab=a\bar{\alpha}(b)$, 下证 S 为 $\bar{\alpha}$ - 斜 Armendariz 环. 对 $S[x;\bar{\alpha}]$ 中任意两个元素

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix}(0,r_{1i}) & (r_{2i},0)\\ 0 & (0,r_{3i})\end{pmatrix}x^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}(0,r_{1j'}) & (r_{2j'},0)\\ 0 & (0,r_{3j'})\end{pmatrix}x^j$$

若 $f(x)g(x)=0$, 则

$$0=f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}\left[\sum_{i+j=k}\begin{pmatrix}(0,r_{1i}) & (r_{2i},0)\\ 0 & (0,r_{3i})\end{pmatrix}\bar{\alpha}^i\begin{pmatrix}(0,r_{1j'}) & (r_{2j'},0)\\ 0 & (0,r_{3j'})\end{pmatrix}\right]x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n+m}\begin{pmatrix}(0,\sum_{i+j=k}r_{1i}r_{1j'}) & 0\\ 0 & (0,\sum_{i+j=k}r_{3i}r_{3j'})\end{pmatrix}x^k$$

故在 $R[x]$ 中

$$(r_{10}+r_{11}x+\cdots+r_{1n}x^n)(r_{10'}+r_{11}x+\cdots+r_{1m}x^m)=0$$

$$(r_{30}+r_{31}x+\cdots+r_{3n}x^n)(r_{30'}+r_{31}x+\cdots+r_{3m}x^m)=0$$

由 R 为 Armendariz 环, $r_{1i}r_{1j'}=0$, $r_{3i}r_{3j'}=0$。由此

$$\begin{pmatrix}(0,r_{1i}) & (r_{2i},0)\\ 0 & (0,r_{3i})\end{pmatrix}\bar{\alpha}^i\begin{pmatrix}(0,r_{1j'}) & (r_{2j'},0)\\ 0 & (0,r_{3j'})\end{pmatrix}=0$$

参 考 文 献:

[1] Rege M B, Ardeline M B. Integrally closed rings and the Armendariz property [J]. International Electronic of Algebra volume, 2007, 1: 11-17.

[2] Muhittin Baser. On Armendariz and quasi-Armendariz modules [J]. Notedi Matematica, 2006, 26(1): 173-177.

[3] Hirano Y. On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring [J]. J. PureAppl. Algebra, 2002, 168: 45-52.

[4] Hong C Y, Kim N K, Kwak T K. On shew Armendariz rings [J], Comm. Algebra, 2003, 31: 103-122.

[5] 郭颖. Armendariz 环和斜 Armendariz 环 [D]. 吉林: 吉林大学硕士学位论文, 2004.

[6] Moussavi A, Hashemi E. On (α,δ)-skew Armendariz rings [J]. J. KoreanMath. Soc. 2005, 42(2), 353-363.

[7] Krempa J. Some examples of reduced rings [J]. AlgebraColloq., 1996, 3(4): 289-300.

[8] Kim N K, Lee K H, Lee Y. Power series rings satisfying a zero divisor porperty [J]. Comm. Alg, 2006, 34: 2205-2218.

[9] Liu Z K, Zhao R Y. On weak Armendariz rings [J]. Comm. Algebra, 2006, 34: 2607-2616).

[10] 梁力. 广义 Armendariz 环 [D]. 兰州: 西北师范大学硕士学位论文, 2006.

[11] Hong C Y, Kim N K, Kwak T K. Ore extensions of Baer and p. p. rings [J]. J. PureAppl. Algebra, 2000, 151: 215-226.

[12] 郭莉琴, 何建伟, 邵海琴. Meta-sided exchange 环及其扩张 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2010, 23(5): 516-518.

Ore Extensions of Baer and p. p. -rings

HE Jian-wei, GUO Li-qin, SHAO Hai-qin, YANG Sui-yi, WANG Li-mei

(School of Mathematics and Statistic, Tianshui Normal College, Tianshui 741001, China)

Abstract: Two relation between the Armendarizness and the left right annihilator are gived, the corresponding result is extended to the (α,δ)-skew Armendariz ring, and the property of annihilator in (α,δ)-skew Armendariz rings is discussed. Because of its characteristics, the result about left annihilator is different from the right. Use one of the results, the Ore extensions of Baer and p. p. -rings are given under the new condition.

Key words: (α,δ)-skew Armendariz rings; annihilator; Ore extensions; Baer rings; p. p. -rings