

## 多个体系统在空间曲线上的一致性问题

王宝平<sup>1,2</sup>, 朱建栋<sup>2</sup>, 匡静<sup>2</sup>

(1. 泰州师范高等专科学校, 江苏 泰州 225300; 2. 南京师范大学数学科学学院, 南京 210097)

**摘要:**提出了三维空间中的多个体系统在某一确定的光滑空间曲线上的一致性问题。在一定条件下,设计了一个非线性的分散反馈控制协议,使得每一个个体随着时间的推移趋向于该曲线,都沿着曲线的同一个方向运动,并且运动速度趋于一致。最后给出了仿真例子,对理论结果进行了验证。

**关键词:**多个体系统; 空间曲线; 一致性问题

**中图分类号:** O231.2

**文献标识码:** A

### 引言

最近在多个体系统的协调性研究中出现了一个重要的研究课题:一致性问题。一致性问题在计算机科学中已有很长的历史,一致成问题是分布式理论的基础。一致成问题的开创性工作始于管理科学和统计学领域中的研究,文献[1]将其中的思想应用于多传感器采集不确定性信息的融合问题。

近年来,由于在无人飞行器的协作控制、自动操作高速公路系统的调度、卫星群的信息控制、多移动机器人的最优分配等方面有广泛的应用,多个体系统分散控制方面的研究得到了广泛的关注,其中信息一致性或一定数量的利益上的一致性成是重要的问题之一。文献[2]提出了一个有 $n$ 个个体在不同的“头领”下以同样的速度在平面上运动的离散模型。文献[3]给出了该模型行为一致的理论解释。一致成问题的概念是在文献[4]中正式提出,该文讨论了有向固定拓扑网络、有向切换拓扑网络和有时滞的无向拓扑网络三种情形下的一致成问题,并给出了一致分析。文献[5]扩展了文献[3-4]的结果,把有向网络的强连通条件减弱为存在有向生成树的条件。文献[6]研究了有固定拓扑离散系统的一致成问题,借助于“领头者—跟从者”的分解结构,给出了个体成为“领头”的充要条件。文献[7]讨论了一般信息拓扑下的离散多个体系统的动态行为。文献[8]基于固定

的时不变的有向拓扑,研究了智能群体的群集运动,通过设计分散控制器使所有智能体渐近地取得一致的速度向量。在研究中同时考虑了 Reynolds 模型的三条规则。文献[9]讨论了切换拓扑的动态个体网络的一致成问题。文献[10]讨论了高维情形下的多个体系统的一致成问题,研究了一致成函数的结构,给出了具有切换拓扑的多个体系统获得一致性的充分条件。

群集问题的研究源于生物界的蜂群、蚁群等现象,其无需集中控制就会产生群集。目前,已有不少研究者对其产生了兴趣。文献[11]给出了多个体网络系统分布群集算法的设计和分析的理论框架,文中给出了三种算法,讨论了自组织群集的情形及有群目标和避障的群集的情形。Vicsek 等提出了一个模拟粒子群集现象的离散模型<sup>[2]</sup>。另有不少人研究了多个体合作控制问题或对该模型进行稳定性研究<sup>[3,12-13]</sup>。

在编队控制这类问题中,个体间不仅就某个状态量(如速度)要达到一致,而且个体在移动过程中,保持预先的队形。文献[15-16]给出了系统拓扑结构与编队稳定性之间的关系。聚集问题中,则要求各个体同时到达一个未知地点,属于一类位置一致问题,文献[17]做了比较深入的研究。

本文提出多个体系统在空间曲线上的一致成问题,即让各个体在任意的初始状态下趋向于给定的曲线,并渐近地按相同的方向和速度大小沿曲线运动。如果

收稿日期:2011-09-26

基金项目:国家自然科学基金(10701042)

作者简介:王宝平(1972-),男,江苏兴化人,讲师,硕士,主要从事线性非线性控制及微分几何方面的研究。(E-mail) hellowangbp@163.com

事先设计好一条曲线,使之绕开已知障碍物,则这一问题的解决能有助于个体群体绕开已知障碍进行一致的运动,并到达目的地,即有利于解决一类避障问题。

### 1 多个体系统在空间曲线上的一致性定义

考虑有  $n$  个个体的系统,有向网络拓扑为  $G = (V, E, A)$ 。其中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, x_i = [p_i, v_i]^T, V = \{1, 2, \dots, n\}$  是有向图的节点集,  $E$  为有向边集,  $A = (a_{ij})$  为邻接矩阵。系统各个体所满足的动态方程为:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $p_i = [p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}]^T, v_i = [v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}]^T$  分别为个体  $i$  的位置向量和速度向量,  $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}]^T$  为控制(加速度)输入。记向量  $\vec{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}), \vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}), i = 1, 2, \dots, n$ 。

定义 1 所谓多个体系统在光滑曲线  $L$  上渐近达到一致,是指在任意初始状态下,随着时间的演化,各个体都趋向于曲线  $L$ ,并沿着该曲线朝着同一个方向以相同的速率运动。

控制目标就是设计控制输入  $u_i$  使系统的各个体取得如上定义下的一致性。

假设有一空间光滑曲线

$$L: \begin{cases} g(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ h(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $g: R^3 \rightarrow R, h: R^3 \rightarrow R$ , 是光滑映射。

基本假设: 对于任意的  $x \in R^3$ , 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

行满秩。

记

$$\vec{n}_g(x) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \quad (4)$$

$$\vec{n}_h(x) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_3} \right) \quad (5)$$

记曲线  $L$  上的任一点  $P(x_1, x_2, x_3)$  处的切向量为  $\vec{l}(x)$ , 则有  $\vec{l}(x) = \vec{n}_g(x) \times \vec{n}_h(x)$ 。记  $b(x) = |\vec{l}(x)|$ , 则

$\vec{l}(x)$  的单位向量为  $\vec{l}^0(x) = \frac{\vec{l}(x)}{b(x)}$ 。

引理 由基本假设可得  $\vec{l}(x) \neq \vec{0}$  (或  $b(x) \neq 0$ ),  $\forall x \in R^3$ , 并且矩阵

$$P(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} \\ \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} \\ l_1(x) & l_2(x) & l_3(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

对于任意的  $x \in R^3$  都是非奇异矩阵, 其中  $l_i(x)$  是  $\vec{l}(x)$  的分量。

证明 由基本假设知, 矩阵(3)至少有一个二阶子式不为 0, 从而有向量积的定义, 得  $\vec{l}(x) \neq \vec{0}$ 。对矩阵(6)取行列式, 得

$$|P(x)| = l_1^2(x) + l_2^2(x) + l_3^2(x) \neq 0 \quad (7)$$

从而引理得证。

用数学语言来描述本文的问题, 即为设计分散控制协议使得闭环网络系统实现如下两个目标:

- 1)  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} g(p_{i1}(t), p_{i2}(t), p_{i3}(t)) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} h(p_{i1}(t), p_{i2}(t), p_{i3}(t)) = 0 \end{cases}$
  - 2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_i(t) \cdot \vec{l}^0(p_i(t)) = c, i = 1, 2, \dots, n$
- 其中  $c$  为依赖于所有个体初始状态的常数。

### 2 控制输入设计的探讨

#### 2.1 对实现控制目标 1) 的探讨

$$\dot{\xi}_{ig} = g(p_{i1}(t), p_{i2}(t), p_{i3}(t)) \quad (8)$$

$$\dot{\xi}_{ih} = h(p_{i1}(t), p_{i2}(t), p_{i3}(t)) \quad (9)$$

为设计  $u_i$ , 对上两式求二阶导数。先求一阶导数:

$$\dot{\xi}_{ig} = \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} v_{i1} + \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} v_{i2} + \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} v_{i3} =: \eta_{ig} \quad (10)$$

$$\dot{\xi}_{ih} = \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} v_{i1} + \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} v_{i2} + \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} v_{i3} =: \eta_{ih} \quad (11)$$

其中  $\eta_{ig} = v_i \cdot \vec{n}_g(p_i), \eta_{ih} = v_i \cdot \vec{n}_h(p_i)$ 。

求二阶导数, 得

$$\ddot{\xi}_{ig} = \dot{\eta}_{ig} = \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} u_{i1} + \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} u_{i2} + \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} u_{i3} + K_{ig} \quad (12)$$

$$\ddot{\xi}_{ih} = \dot{\eta}_{ih} = \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} u_{i1} + \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} u_{i2} + \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} u_{i3} + K_{ih} \quad (13)$$

其中

$$K_{ig} = \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i1}^2} v_{i1} + \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i2}^2} v_{i2} + \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i3}^2} v_{i3} + 2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i1} \partial p_{i2}} v_{i1} v_{i2} + \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i2} \partial p_{i3}} v_{i2} v_{i3} + \frac{\partial^2 g}{\partial p_{i1} \partial p_{i3}} v_{i1} v_{i3} \right)$$

$$K_{ih} = \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i1}^2} v_{i1} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i2}^2} v_{i2} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i3}^2} v_{i3} + 2 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i1} \partial p_{i2}} v_{i1} v_{i2} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i2} \partial p_{i3}} v_{i2} v_{i3} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_{i1} \partial p_{i3}} v_{i1} v_{i3} \right)$$

如果我们能够设计  $u_i$  满足

$$\frac{\partial g}{\partial p_{i1}} u_{i1} + \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} u_{i2} + \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} u_{i3}$$

$$= -K_{ig} - k_{1g}\xi_{ig} - k_{2g}\eta_{ig} \quad (14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial p_{i1}}u_{i1} + \frac{\partial h}{\partial p_{i2}}u_{i2} + \frac{\partial h}{\partial p_{i3}}u_{i3} = -K_{ih} - k_{1h}\xi_{ih} - k_{2h}\eta_{ih} \quad (15)$$

其中  $k_{1g}, k_{2g}, k_{1h}, k_{2h}$  为正的常数, 则

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{ig} = \eta_{ig} \\ \dot{\xi}_{ih} = \eta_{ih} \\ \dot{\eta}_{ig} = -k_{1g}\xi_{ig} - k_{2g}\eta_{ig} \\ \dot{\eta}_{ih} = -k_{1h}\xi_{ih} - k_{2h}\eta_{ih} \end{cases} \quad (16)$$

从而有, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,

$$\xi_{ig} \rightarrow 0, \xi_{ih} \rightarrow 0 \quad (17)$$

$$\eta_{ig} \rightarrow 0, \eta_{ih} \rightarrow 0 \quad (18)$$

其中(17)表明控制目标1) 得到实现。(18)表明个体  $i$  在曲线  $L$  上的运动方向是沿着曲线  $L$  上的各点的切向量方向运动, 即个体  $i$  将沿着曲线  $L$  运动。

下面再探讨所有个体沿曲线  $L$  运动的速度一致性问题。

### 2.2 对控制目标2)的探讨

设

$$\zeta_i = \bar{l}^0(p_i(t)) \cdot v_i(t) \quad (19)$$

则

$$\dot{\zeta}_i = \bar{l}^0(p_i(t)) u_i(t) + \left( \frac{\partial \bar{l}^0}{\partial p_i} v_i(t) \right) v_i(t) \quad (20)$$

令

$$K_i(p_i, p_i) = \left( \frac{\partial \bar{l}^0}{\partial p_i} v_i(t) \right) v_i(t) \quad (21)$$

如果我们能够设计  $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}]^T$  满足

$$\bar{l}^0(p_i(t)) \cdot u_i(t) = -K_i(p_i, p_i) + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) \quad (22)$$

则将(22)代入(20), 得

$$\dot{\zeta}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) \quad (23)$$

由文献[5]可知, (23)可写成紧凑形式

$$\dot{\zeta}_i = -L\zeta \quad (24)$$

其中,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T, L = (l_{ij}) \in R^{n \times n}$  为有向图  $G(A)$  的拉普拉斯矩阵, 其定义为

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}, & j = i \\ -a_{ij}, & j \neq i \end{cases} \quad (25)$$

由[6]知, 如果有向图中含有一个生成树, 则  $\zeta_i \rightarrow c, (t \rightarrow +\infty)$ 。这说明目标2) 得以实现。

### 2.3 输入控制 $u_i$ 的设计

由小节2.1, 2.2分析知, 如果设计  $u_i$  使(14), (15)和(22)同时成立, 则控制目标1)和2)得到实现,

多个体系统实现沿空间曲线  $L$  的速度一致性。

联立(14), (15)和(22), 得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} \\ \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} \\ b^{-1}(p_i)l_1(p_i) & b^{-1}(p_i)l_2(p_i) & b^{-1}(p_i)l_3(p_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ig} - k_{1g}\xi_{ig} - k_{2g}\eta_{ig} \\ -K_{ih} - k_{1h}\xi_{ih} - k_{2h}\eta_{ih} \\ -K_i(p_i, p_i) + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) \end{bmatrix} \quad (26)$$

由引理可见, (26)中控制项的系数矩阵是可逆的。

从而由(26), 得

$$\begin{bmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} \\ \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} \\ b^{-1}(p_i)l_1(p_i) & b^{-1}(p_i)l_2(p_i) & b^{-1}(p_i)l_3(p_i) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -K_{ig} - k_{1g}\xi_{ig} - k_{2g}\eta_{ig} \\ -K_{ih} - k_{1h}\xi_{ih} - k_{2h}\eta_{ih} \\ -K_i(p_i, p_i) + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) \end{bmatrix} \quad (27)$$

此即为所求的分散控制协议。

综上所述我们给出本文的主要结果。

**定理** 考虑基于有向网络  $G = (V, E, A)$  的多个体系统(1), 设有向图中  $G$  含有一个生成树并且关于空间光滑曲线  $L$  的基本假设成立, 则存在一个非线性分散控制协议, 使得定义1所描述的沿空间曲线  $L$  的速度一致性问题得到解决。

### 3 仿真算例

下面假设多个体系统  $\dot{x} = Ax$  的有向网络拓扑为  $G = (V, E, A)$ 。其中  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, x_i = [p_i, v_i]^T, A =$

$$(a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

。系统各个体所满足的动态方程为:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \end{cases}$$

个体  $i$  的位置向量为  $p_i = [p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}]^T$ , 速度向量为  $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}]^T, u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}]^T$  为控制(加速度)输入。

例 设  $L: \begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

则

$g(x_1, x_2, x_3) = x_2 - \sin x_1$

$h(x_1, x_2, x_3) = x_3$

从而有

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -\cos x_1, \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1, \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$

$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial h}{\partial x_3} = 1$

$l(x) = (1, \cos x_1, 0)^T$

$\bar{l}^0 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x_1}}, \frac{\cos x_1}{\sqrt{1 + \cos^2 x_1}}, 0 \right)^T$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \sin x_1, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} = 0$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = 0$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$

$\frac{d\bar{l}^0}{dx_1} = \begin{bmatrix} (1 + \cos^2 x_1)^{-\frac{3}{2}} \sin x_1 \cos x_1 \\ -(1 + \cos^2 x_1)^{-\frac{3}{2}} \sin x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\frac{d\bar{l}^0}{dx_2} = \frac{d\bar{l}^0}{dx_3} = 0$

$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} v_{i1} + \frac{\cos p_{i1}}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} v_{i2}$

$K_i(p_i, v_i) = (1 + \cos^2 p_{i1})^{-\frac{3}{2}} \sin p_{i1} (v_{i1}^2 \cos p_{i1} - v_{i1} v_{i2})$

$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial g}{\partial p_{i3}} \\ \frac{\partial h}{\partial p_{i1}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i2}} & \frac{\partial h}{\partial p_{i3}} \\ b^{-1}(p_i) l_1(p_i) & b^{-1}(p_i) l_2(p_i) & b^{-1}(p_i) l_3(p_i) \end{bmatrix}^{-1} =$

$\begin{bmatrix} -\cos p_{i1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} & \frac{\cos p_{i1}}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\begin{bmatrix} -\frac{\cos p_{i1}}{1 + \cos^2 p_{i1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} \\ \frac{1}{1 + \cos^2 p_{i1}} & 0 & \frac{\cos p_{i1}}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

取  $k_{1g} = k_{2g} = k_{1h} = k_{2h} = 1$ , 则得输入控制:

$[u_{i1} \ u_{i2} \ u_{i3}]^T =$

$\begin{bmatrix} -\frac{\cos p_{i1}}{1 + \cos^2 p_{i1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} \\ \frac{1}{1 + \cos^2 p_{i1}} & 0 & \frac{\cos p_{i1}}{\sqrt{1 + \cos^2 p_{i1}}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times$

$\begin{bmatrix} -\sin p_{i1} \cdot v_{i1} - p_{i2} + \sin p_{i1} + \cos p_{i1} \cdot v_{i1} - v_{i2} \\ -p_{i3} - v_{i3} \\ -K_i(p_i, v_i) + \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) \end{bmatrix}$

仿真结果由图 1 和图 2 所示。图 1 显示了各个体运动的轨迹, 图 2 显示了各个体运动的速率的渐近一致性。

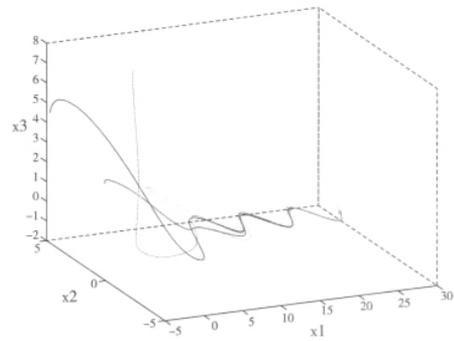


图 1 四个个体的运动轨迹

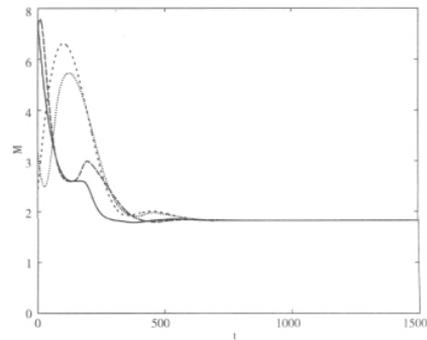


图 2 四个个体速率的时间响应

### 4 结束语

本文提出并解决了三维多个体系统在确定的空间光滑曲线上的速度一致性问题。通过仿真例子验证了所设计的控制可以使各个体在所给曲线上达到速度一致。这里只给出和研究了各个体在一条光滑曲线上达到一致性的情形, 至于在一般的多条曲线上, 我们将进一步研究。另外, 对于切换有向网络拓扑情形下的控制设计也有待进一步探讨。

## 参考文献:

- [1] Degroot M H. Reaching a consensus [J]. Journal of American Statistical Association, 1974, Vol. 69, No. 345: 118-121.
- [2] Vicsek T, Czirok A, Jacob E B et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles [J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 75(6): 1226-1229.
- [3] Jadbababaie A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2003, 48(9): 988-1001.
- [4] Olfati-saber R, Murry R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [5] Wang R, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [6] Wang X F, Wang L. Consensus problems in discrete-time multiagent systems with fixed topology [J]. J. Math. Anal. Appl, 2006, 322: 587-598.
- [7] Wang X F, Wang L. Dynamic behavior of discrete-time multiagent systems with general communication structures [J]. Physica A, 2006, 370: 364-380.
- [8] 俞辉, 王永骥, 程磊. 基于有向网络的智能群体群集运动控制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 79-83.
- [9] Xie G, Wang L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents: switching topology. Proceedings of the 2006 American Conference [C]. Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006: 1382-1387.
- [10] Wang X F, Wang L. Consensus problems for high-dimensional multi-agent systems [J]. IET Control Theory Appl, 2007, 1(3): 830-837.
- [11] Olfati-saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [12] Tanner H G, Jadbababaie A, PAPPAS G J. Stable flocking of mobile agents Part I: Fixed topology. Proc. IEEE Conference on Decision and Control [C]. Maui, Hawaii USA, 2003, 2: 2010-2015.
- [13] Tanner H G. Flocking with obstacle avoidance in switching networks of interconnected vehicles. IEEE International Conference Robotics and Automation [C]. New Orleans LA, April 26-May 1, 2004: 3006-3011.
- [14] Fax J A, Murry R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [15] Lin Z, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(1): 121-127.
- [16] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem Proc. IEEE Conference on Decision and Control [C]. Maui, Hawaii USA, 2003: 1508-1513.
- [17] Olfati-saber R, Murry R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents. Proc of the American Control Conference [C]. Denver, Colorado, June 4-6, 2003: 951-956.
- [18] 杨文, 汪小帆, 李翔. 一致性问题综述 [A]. Proc of the 25th Chinese Control Conference [C]. Harbin, Heilongjiang, August 7-11, 2006: 1491-1495. (YANG W, WANG X F, Li X. A survey of consensus problem in multi-agent systems [A]. Proc. IEEE Conference on Decision and Control [C]. Maui, Hawaii USA, 2003: 1508-1513.)

## Consensus Problem of Multi-agent Systems along a Spatial Curve

WANG Bao-ping, ZHU Jian-dong, KUANG Jing

(1. Taizhou Teachers College, Taizhou 225300, China;

2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract:** The consensus problem along a spatial curve is proposed for multi-agent systems. Under some conditions, a nonlinear decentralized feedback protocol is designed so that all agents converge to the curve and their velocities are in agreement asymptotically. Finally, simulation examples are given to illustrate the theoretical results.

**Key words:** multi-agent systems; spatial curve; consensus problem