

森林救火费用最小的优化模型

王光清

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 针对森林火灾问题进行了研究, 在综合考虑森林损失费和救援费与消防队员人数之间的关系下, 以总费用最小为目标, 建立了一个优化模型。利用微分法对模型进行了求解, 得出了最优结果, 并进行了结果可行性分析, 具有一定的参考价值。

关键词: 森林损失费; 救火总费用; 森林烧毁面积; 火势蔓延程度; 火势蔓延速度; 平均灭火速度

中图分类号: F224.9

文献标识码: A

1 问题的提出

森林火灾, 是危害森林的大敌, 一场火灾在旦夕之间就能把大片苍翠茂密的森林化为灰烬, 给国家和集体造成严重损失, 同时林地失去了森林的覆盖, 容易造成水土流失, 容易发生水旱风沙灾害, 影响农业稳产高产。在居民点、农田、山林交错的山区发生了森林火灾, 还会烧毁房舍、粮食、农具和耕畜, 影响群众生产、生活。森林火灾还会烧死林中的大量益鸟、益兽和烧毁各种林副产品。发生森林火灾, 必须动员大批人员去扑火, 既耽误生产, 又浪费人力物力, 甚至造成人身伤亡事故, 给国家人民带来损失。

森林失火了, 消防站接到报警后派多少消防队员前去救火呢? 派的队员越多, 森林的损失越小^[1], 但是救援的开支会越大。所以需要综合考虑森林损失费和救援费与消防队员人数之间的关系, 以总费用最小^[2]来决定派出队员的数目。

2 问题分析

损失费通常正比于森林烧毁的面积, 而烧毁面积与失火、灭火(指火被扑灭)的时间有关, 灭火时间又取决于消防队员数目, 队员越多灭火越快^[3]。救援费除与消防队员人数有关外, 也与灭火时间长短有关。记失火时

刻为 $t=0$, 开始救火时刻为 $t=t_1$, 灭火时刻为 $t=t_2$, 设在时刻 t 森林烧毁面积为 $B(t)$, 则造成损失的森林烧毁面积为 $B(t)$, 建模要对函数 $B(t)$ 的形式作出合理的简单假设^[4]。

研究 $\frac{dB}{dt}$ 比 $B(t)$ 更为直接和方便。 $\frac{dB}{dt}$ 是单位时间烧毁面积, 表示火势蔓延的程度。在消防队员到达之前, 即 $0 \leq t \leq t_1$, 火势越来越大, 即 $\frac{dB}{dt}$ 随 t 的增加而增加; 开始救火以后, 即 $t_1 \leq t \leq t_2$, 如果消防队员救火能力足够强, 火势会越来越小, 即 $\frac{dB}{dt}$ 应减小, 并且当 $t=t_2$ 时 $\frac{dB}{dt}=0$ 。

救援费可分为两部分: 一部分是灭火器材的消耗及消防队员的薪金等, 与队员人数^[5]及灭火所用的时间均有关, 另一部分是运送队员和器材等一次性支出, 只与队员人数有关。

3 模型假设

需要对烧毁森林的损失费、救援费及火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 的形式作出假设。

I. 损失费与森林烧毁面积 $B(t_2)$ 成正比, 比例系数

c_1, c_1 即烧毁单位面积的损失费。

II. 从失火到开始救火这段时间 ($0 \leq t \leq t_1$) 内, 火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 与时间成正比, 比例系数 β 称火势蔓延速度。

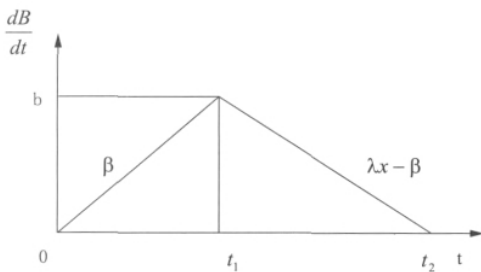
III. 派出消防队员 x 名, 开始救火以后 ($t \geq t_1$) 火势蔓延速度降为 $\beta - \lambda x$, 其中 λ 可视为每个队员的平均灭火速度。显然应有 $\beta < \lambda x$ 。

IV. 每个消防队员单位时间的费用为 c_2 , 于是每个队员的救火费用是 $c_2(t_2 - t_1)$; 每个队员的一次性支出是 c_3 。

第 II 条假设可作如下解释^[6]: 火势以失火点为中心, 以均匀速度向四周呈圆形蔓延。所以蔓延的半径 r 与时间 t 成正比。又因为烧毁面积 B 与 r^2 成正比, 故 B 与 t^2 成正比, 从而 $\frac{dB}{dt}$ 与 t 成正比。

4 建模与求解

根据假设条件 II、III, 火势蔓延程度 $\frac{dB}{dt}$ 在 $0 \leq t \leq t_1$ 线性地增加, 在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 线性地减小。 $\frac{dB}{dt} \sim t$ 的图形如下图所示。



记 $t = t_1$ 时 $\frac{dB}{dt} = b$ 。烧毁面积 $B(t_2) = \int_0^{t_2} \frac{dB}{dt} dt$ 恰

是图中三角形的面积, 显然有 $B(t_2) = \frac{1}{2}bt_2$, 而 t_2 满足

$$t_2 - t_1 = \frac{b}{\lambda x - \beta} \tag{1}$$

于是

$$B(t_2) = \frac{1}{2}bt_2 + \frac{b^2}{2(\lambda x - \beta)} \tag{2}$$

根据假设条件 I、IV, 森林损失费为 $cB(t)$, 救援费为 $c_2x(t_2 - t_1) + c_3x$ 将 (1)、(2) 代入, 得到救火总费用为^[7]

$$C(x) = \frac{1}{2}c_1bt_1 + \frac{c_1b^2}{2(\lambda x - \beta)} + \frac{c_2bx}{\lambda x - \beta} + c_3x \tag{3}$$

问题归结为求 x 使 $C(x)$ 达到最小。

令 $\frac{dC}{dx} = 0$, 可以得到应派出的队员人数为^[8]

$$x = \sqrt{\frac{c_1\lambda b^2 + 2c_2\beta b}{2c_3\lambda^2}} + \frac{\beta}{\lambda} \tag{4}$$

5 模型评注

结果解释 首先, 应派出队员数目由两部分组成, 其中一部分 $\frac{\beta}{\lambda}$ 是为了把火扑灭所必须的最低限度。因为 β 是火势蔓延速度, 而 λ 是每个队员的平均灭火速度, 所以这个结果是明显的。从图 1 也可以看出, 只有当 $x > \frac{\beta}{\lambda}$ 时, 斜率为 $\lambda x - \beta$ 的直线才会与 t 轴有交点 t_2 。

其次, 派出队员数的另一部分, 即在最低限度之上的人数, 与问题的各个参数有关^[9]。当队员灭火速度 λ 和救援费用系数 C_3 增大时, 队员数减少; 当火势蔓延速度 β 、开始救火时的火势 b 及损失费用系数 c_1 增加时, 队员数增加。这些结果与常识是一致的。(4) 式还表明, 当救援费用系数 c_2 变大时队员数也增大。

实际应用这个模型时, c_1, c_2, c_3 是已知常数, β, λ 由森林类型、消防队员素质等因素决定, 可以预先制成表格以备查用^[10]。较难掌握的是开始救火时的火势 b , 它可以由失火到救火的时间 t 按 $b = \beta t$ 算出, 或根据现场情况估计。

评注建立这个模型的关键是对 $\frac{dB}{dt}$ 的假设, 比较合理而又简化的假设条件 2、3 只能符合无风的情况, 在风势的影响下应考虑另外的假设, 再者, 有人对队员灭火的平均速度 λ 是常数的假设提出异议, 认为 λ 应与开始救火时的火势 b 有关, b 越大 λ 越小, 这时要对函数 $\lambda(b)$ 作出合理的假设, 再得到进一步的结果。

参考文献:

- [1] 蔡乐才, 朱颢东. 基于 AI 问题的一种“最优”解方法及实现[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(5): 22-25.
- [2] 傅采慧, 刘嘉勇. 网络安全信任模型的研究[J]. 四川

- 理工学院学报: 自然科学版 2006, 19(6): 36-39.
- [3] 苏金明, 阮沈勇. Matlab6.1 实用指南[M]. 北京: 电子工业出版社 2002.
- [4] 赫孝良. 数学建模竞赛赛题简析与论文点评[M]. 西安: 西安交通大学出版社 2002.
- [5] 徐全智, 杨晋浩. 数学建模[M]. 北京: 高等教育出版社 2003.
- [6] 胡运权, 郭耀煌. 运筹学教程[M]. 北京: 清华大学出版社 1998.
- [7] baike.baidu.com/view/496693.htm 2010 7-23.
- [8] <http://www.tianguan.com.cn/jj/q/bjwd/009.html> 2007, 9. 1.
- [9] <http://jiuyuejiu2.8u8.com/jiujingshengchanwenda/012/012.html> 2007 9. 1.
- [10] <http://www.cycnet.com.cn/index.htm> 2007 9. 1.

Optimization Model of Lowest Cost in Forest Firefighting

WANG Guang-qing

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, Chian)

Abstract: The problem of forest fire is researched. Comprehensively considering the cost of forest loss, the number of firefighters and rescue fee, an optimization model with the target of minimize the total cost is set up, the model is solved through differential method, and then the optimal result is obtained. a feasibility analysis of the results is conducted which has some reference value.

Key words: cost of forest loss; total rescue fee; area of forest burned; the spread of fire; average speed of firefighting