第 24 卷第 6 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 6
2011 年 12 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Dec. 2011
文章编号:1673-1549(2011)06-0733-03

# 一种构造正交尺度函数的方法

明　锋,张臣国

(电子科技大学数学科学学院,成都　611731)

摘　要:由于多小波解决了单小波不可能同时具有正交性、紧支性和对称性的困难,其更具有研究的价值。在正交多小波理论的基础上,研究了利用两尺度函数构造正交的尺度函数的方法,从理论上给出了直接用尺度函数正交化方法构造正交多尺度函数的方法。

关键词:多小波;正交性;尺度函数
中图分类号:O174.2　　文献标识码:A

## 引　言

随着小波分析的发展日益成熟,其应用也越来越广泛,它的理论与算法也研究得越来越深入,由于 2 尺度小波的构造与 mallat 分解已成熟[1],如出现了由 I. Daubcchies 构造的一系列正交小波,而用 $a$ 尺度小波分解信号我们可以得到更好的分辨率,灵活性更大。所以 $a$ 尺度小波的理论的研究也越来越重要,特别是正交多小波已经很好的解决了小波同时具有正交,对称,紧支等特点,研究 $a$ 尺度正交多小波更具有重要意义[4-8],1996 年 Chui 和 Lian 利用对称性给出了 2 重多尺度函数和多小波,杨守志等人给出了几种多小波的构造方法。本文根据已有文献从理论上研究了一种构造正交尺度函数的方法。

## 1　$a$ 尺度多分辨分析

**定义 1**[1,4-5]　Hilbert 空间 $L^2(R)$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 称为一个 $a$ 尺度($a>1, a\in N_+$)正交多重多分辨分析,若满足:

(1) $V_j \subseteq V_{j+1}(j\in Z)$;

(2) $f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(at)\in V_{j+1}$;

(3) $\bigcap_{j\in Z} V_j=\{0\}$,$\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$;

(4) 存在 $r$ 个函数 $\phi_1(t),\phi_2(t)\cdots,\phi_r(t)$,使 $\{\phi_v(t-k), k\in Z, 1\leqslant v\leqslant r\}$ 为 $V_0$ 的一个标准正交基,其中 $\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t)\cdots,\phi_r(t))^T$ 为 $a$ 尺度正交多分辨分析的尺度函数,且 $\phi_{j,k}^v=a^{\frac{j}{2}}\phi_v(a^j-k)$,$\forall k,j\in Z$,$\phi(t)$ 满足两尺度关系 $\phi(t)=\sum_{k\in Z}P_k\phi(at-k)$ ①其中 $P_k$ 为两尺度矩阵序列,且 $P_k=(p_{u,kr+v})_{1\leqslant u,v\leqslant r}$,$k\in Z$ 为 $r\times r$ 阶矩阵,对①作傅里叶变换得到

$$\hat{\phi}(\omega)=P\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

其中

$$P(\omega)=\frac{1}{a}\sum_{k\in Z}P_k e^{-ik\omega},P(\omega)$$

为两尺度矩阵符号。

两个列向量值函数的内积定义为

$$\langle A,B\rangle=\int_R A\,\overline{B}^T dx$$

**定义 2**[2]　称 $\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots\phi_r(t))^T$ 与 $\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots\phi_r 2(t))^T$ 为 $a$ 尺度 $r$ 重正交多尺度函数,若满足

$$\langle\phi(t),\phi(t-n)\rangle=\delta_{0n}I_r, n\in Z$$

**定义 3**[2]　设 $\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\ldots,\phi_r(t))^T\in L^2(R)$ 则 $\phi(t)$ 的自相关符号 $\Delta_\phi(\omega)$ 定义为

$$\Delta_\phi(\omega)=\sum_{k\in Z}\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\,\overline{\hat{\phi}(\omega+2k\pi)}^T$$

**定义 4**[2]　设 $C(\omega)$ 是非奇异矩阵($\forall\omega\in R$),若 $\tilde{P}(\omega)=C(a\omega)P(\omega)C(\omega)^{-1}$,则称 $\tilde{P}(\omega)$ 是关于 $C(\omega)$ 的两尺度相似变换. $C(\omega)$ 称为相似变换矩阵。

---

收稿日期:2011-12-01

作者简介:明　锋(1981-),男,四川古蔺人,硕士,主要从事小波分析与信息处理方面的研究,(E-mail)mingfeng525@163.com

## 2 多小波正交尺度函数构造

有了前面的必要准备工作,我将从正交族充要条件和两尺度关系构造正交尺度函数,首先看如下引理

2.1 引理 1[1-2,7] 设 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r)^T$, $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_r \in L^2$,则 $\{\phi_l(x-k): 1 \leqslant l \leqslant r, k \in Z\}$ 是一个正交族的充分必要条件是

$$\sum_{k \in Z} \hat{\phi}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}^T(\omega + 2k\pi)} = I_r$$

2.2 引理 2[8] 设 $\phi(t)$ 为多尺度函数,$P_k$ 为对应的两尺度矩阵序列,若 $U$ 是非奇异阵,则 $\phi_1 = U\phi$ 也是多尺度函数,对应的两尺度矩阵符号为 $\tilde{P}_k$,其中 $\tilde{P}_k = UP_kU^{-1}$,特别地,当 $\phi(t)$ 为正交尺度函数,且 $U$ 为正交矩阵,则 $\phi_1 = U\phi$ 仍是正交多尺度函数。

证明 由 $\phi(t) = U^{-1}\phi_1(t)$ 得

$$\phi(at-k) = U^{-1}\phi_1(at-k)$$

所以

$$\phi_1(t) = U\phi(t) = U\sum_{k \in Z} P_k\phi(at-k)$$

$$= U\sum_{k \in Z} P_kU^{-1}\phi_1(at-k) = \sum_{k \in Z} UP_kU^{-1}\phi_1(at-k)$$

令 $\tilde{P}_k = UP_kU^{-1}$ 即可,若 $U$ 为正交阵,容易验证

$$\langle \phi_1(t), \phi_1(t-n) \rangle = U\phi\phi^TU^T$$

$$= U\delta_{0,n}U^T = \delta_{0,n}$$ 证毕

下面我将从正定矩阵正交化介绍尺度函数正交化有如下定理:

2.3 定理 1 设 $\phi$ 是一个任意多尺度函数且 $\Delta_\phi(\omega) \neq I_r$,$P(\omega)$ 为两尺度符号,若存在以 $2\pi$ 为周期函数 $C(\omega)$,使得 $\Delta_\phi(\omega) = C(\omega)^TC(\omega)$,则存在两尺度相似变换 $\tilde{P}(\omega)$ 使 $\hat{\phi}_1(\omega) = (C^T)^{-1}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ 满足

$$\Delta_{\phi_1}(\omega) = I_r, \quad \hat{\phi}_1(\omega) = \tilde{P}\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}_1\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

这里 $\tilde{P}(\omega)$ 是 $P(\omega)$ 关于 $C^T(\omega)$ 的两尺度相似变换。

证明 由 $\Delta_\phi(\omega)$ 的定义和线性代数知,$\Delta_\phi(\omega)$ 是正定阵,且 $\Delta_\phi(\omega) \neq I_r$。所以有

$$\Delta_\phi(\omega) = C(\omega)^TC(\omega)$$

且 $C(\omega)$ 可逆。令 $\hat{\phi}_1(\omega) = (C^T)^{-1}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$

由题设 $C(\omega)$ 为周期函数得

$$\Delta_{\phi_1}(\omega) = \sum_{k \in Z} \hat{\phi}_1(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}_1{}^T(\omega + 2k\pi)}$$

$$= \sum_{k \in Z} (C^T)^{-1}(\omega + 2k\pi)\hat{\phi}(\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\phi}^T(\omega + 2k\pi)}\ \overline{C^{-1}(\omega + 2k\pi)} =$$

$$(C^T)^{-1}(\omega)\left(\sum_{k \in Z} \hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\overline{\hat{\phi}^T(\omega + 2k\pi)}\right)C^{-1}(\omega) = I_r$$

$$\hat{\phi}_1(\omega) = (C^T)^{-1}(\omega)\hat{\phi}(\omega) =$$

$$(C^T)^{-1}(\omega)P\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{a}\right) =$$

$$(C^T)^{-1}(\omega)P\left(\frac{\omega}{a}\right)C^T\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}_1\left(\frac{\omega}{a}\right) =$$

$$\tilde{P}\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}_1\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

由引理 2 和命题 1 我们可以直接得出如下定理:

2.4 定理 2 设 $\phi(t)$,$C(\omega)$,$\tilde{\phi}_1(t)$ 如定理 1,$U$ 为一可逆(正交)矩阵,则存在着两尺度相似变换 $\tilde{P}$,使得对应于 $\tilde{\phi}_1$ 的傅里叶逆变换 $\phi_1$ 为正交多尺度函数,$\phi_2(\omega) = U\phi_1(\omega)$ 为另一个异于 $\phi_1$ 的(正交)多尺度函数。这里 $\hat{\phi}_1(\omega) = (C^T)^{-1}(\omega)\hat{\phi}(\omega)$,$\tilde{P}(\omega)$ 是 $P(\omega)$ 关于 $C^T(\omega)$ 的两尺度相似变换。

证明 由定理 1,有

$$\hat{\phi}_1(\omega) = \tilde{P}\left(\frac{\omega}{a}\right)\hat{\phi}_1\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{1}$$

对(1)作傅里叶逆变换得到 $\phi_1(t)$,因 $\phi_1(t)$ 满足 $\Delta_{\phi_1}(\omega) = I_r$,由引理 1 知 $\phi_1(t)$ 为正交尺度函数,再由引理 2 得 $\phi_2(\omega) = U\phi_1(\omega)$ 为异于 $\phi_1$ 的(正交)多尺度函数。

## 3 算 例

不妨设

$$\hat{\phi} = \left(\omega\chi_{[-\pi,\pi]}(\omega), \frac{1}{\omega}\right)^T$$

则

$$\hat{\phi}(\omega)\overline{\hat{\phi}^T(\omega)} = \begin{pmatrix} \omega^2\chi_{[-\pi,\pi]} & \chi_{[-\pi,\pi]} \\ \chi_{[-\pi,\pi]} & \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

由复分析知

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^2} = \frac{1}{4}\csc^2\frac{\omega}{2}$$

$$\sum_{k \in Z} \hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\overline{\hat{\phi}^T(\omega + 2k\pi)} =$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2\chi_{[-\pi,\pi]} & \chi_{[-\pi,\pi]} \\ \chi_{[-\pi,\pi]} & \frac{1}{4}\csc^2\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} = C^TC$$

这里

$$C^T =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2 + \cot\frac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\frac{\omega}{2} - 4}}{\csc^2\frac{\omega}{2}}\chi_{[-\pi,\pi]} & \dfrac{2\cot\frac{\omega}{2} - \sqrt{\omega^2\csc^2\frac{\omega}{2} - 4}}{\csc^2\frac{\omega}{2}}\chi_{[-\pi,\pi]} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

$$(C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cot\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} & \dfrac{4\cot\dfrac{\omega}{2}-2\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} & \dfrac{4+2\cot\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \end{pmatrix}$$

其中( $\omega \in [-\pi,\pi]$ )

令

$$\hat{\phi}_1(\omega) = (C^T)^{-1}(\omega)\hat{\phi}(\omega) = \begin{pmatrix} \dfrac{\cot\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} & \dfrac{4\cot\dfrac{\omega}{2}-2\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} & \dfrac{4+2\cot\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\chi_{[-\pi,\pi]} \\ \dfrac{1}{\omega} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\omega\cot\dfrac{\omega}{2}}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} + \dfrac{4\cot\dfrac{\omega}{2}-2\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\omega\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \\ \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} + \dfrac{4+2\cot\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}}{\omega\csc^2\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2\csc^2\dfrac{\omega}{2}-4}} \end{pmatrix}$$

其中( $\omega \in [-\pi,\pi]$ ) ，对 $\hat{\phi}_1$ 做傅里叶逆变换得到 $\phi_1$ ，由 2.4 定理 2 可知，$\phi_1$ 为正交尺度函数，并且同时由定理 2 也可求得异于 $\phi_1$ 的正交尺度函数。

## 4　结束语

正交多尺度函数的构造方法有很多，本文基于任一尺度函数出发从理论上构造出正交多尺度函数，并且通过引理 2 可以构造更多的正交多尺度函数，对正交尺度函数的理论构造有一定的价值。文章不足之处在于计算量过大，计算较为复杂。能否通过矩阵分解方面的理论知识将上述问题简化以及从两尺度序列矩阵出发是值得进一步研究和思考的。

参 考 文 献:

[1] 关履泰. 小波方法与应用 [M]. 北京: 高等教育出版社，2007.

[2] 程正兴，杨守志. 小波分析的理论、算法、进展和应 [M]. 北京: 国防工业出版社，2007.

[3] 冷劲松. $\alpha$ 尺度多重双正交小波包 [J]. 工程数学学报，2001，18(s1)，125-130.

[4] A. Baussard，F. Nicolier，F. Truchetet Rational multiresolution analysis and fast wavelet transform: application to wavelet shrinkage denosing Signal Processing，2004，84: 1735-1747.

[5] V. Bruni. D. Vitulano，Combined image compression and denoising using wavelets，Signal Processing: Image Communication，2007，22: 86-101.

[6] Cui Li hong，Cheng Zhengxing Algorithm of Construction for Orthogonal Multiwavelets with Short Supports from a Given Multiscaling Function，Journal of Xian jiaotong University [J]，2003，37(2)，211-214.

[7] 杨守志. a 尺度正交多尺度函数和正交多小波 [J]. 数学物理学报，2005，25A(6): 811-820.

[8] Feng A fang，Zhang Xin，Deng Cai xia. Construction of Compactly Supported Symmetric Orthonormal Multi2-wavelet journal of harbin university of science and technology 2009，14(3): 75-78.

## A Method for Constructing Orthogonal Scaling Function

*MING Feng*，*ZHANG Chen-guo*

(School of Mathematical Sciences，University of Electronic Science and Technology of China，Chengdu 611731，China)

Abstract: Because the multi-wavelets solved the puzzle that single wavelet cannot simultaneously have the properties of orthogonality，compact support and symmetry，it's study has even more value. In the orthogonal multi-wavelet theory based on the study of the structure of orthogonal scaling function method by using the two scale function，a method for constructing orthogonal multiscaling functions directly by orthogonal scaling function is theoretically given.

Key words: multi-wavelets; orthogonal; scaling function