

# 森林救火费用最小的优化模型

王光清

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

**摘要:** 针对森林火灾问题进行了研究, 在综合考虑森林损失费和救援费与消防队员人数之间的关系下, 以总费用最小为目标, 建立了一个优化模型。利用微分法对模型进行了求解, 得出了最优结果, 并进行了结果可行性分析, 具有一定的参考价值。

**关键词:** 森林损失费; 救火总费用; 森林烧毁面积; 火势蔓延程度; 火势蔓延速度; 平均灭火速度

**中图分类号:** F224.9

**文献标识码:** A

## 1 问题的提出

森林火灾, 是危害森林的大敌, 一场火灾在旦夕之间就能把大片苍翠茂密的森林化为灰烬, 给国家和集体造成严重损失, 同时林地失去了森林的覆盖, 容易造成水土流失, 容易发生水旱风沙灾害, 影响农业稳产高产。在居民点、农田、山林交错的山区发生了森林火灾, 还会烧毁房舍、粮食、农具和耕畜, 影响群众生产、生活。森林火灾还会烧死林中的大量益鸟、益兽和烧毁各种林副产品。发生森林火灾, 必须动员大批人员去扑火, 既耽误生产, 又浪费人力物力, 甚至造成人身伤亡事故, 给国家人民带来损失。

森林失火了, 消防站接到报警后派多少消防队员前去救火呢? 派的队员越多, 森林的损失越小<sup>[1]</sup>, 但是救援的开支会越大。所以需要综合考虑森林损失费和救援费与消防队员人数之间的关系, 以总费用最小<sup>[2]</sup>来决定派出队员的数目。

## 2 问题分析

损失费通常正比于森林烧毁的面积, 而烧毁面积与失火、灭火(指火被扑灭)的时间有关, 灭火时间又取决于消防队员数目, 队员越多灭火越快<sup>[3]</sup>。救援费除与消防队员人数有关外, 也与灭火时间长短有关。记失火时

刻为  $t=0$ , 开始救火时刻为  $t=t_1$ , 灭火时刻为  $t=t_2$ , 设在时刻  $t$  森林烧毁面积为  $B(t)$ , 则造成损失的森林烧毁面积为  $B(t)$ , 建模要对函数  $B(t)$  的形式作出合理的简单假设<sup>[4]</sup>。

研究  $\frac{dB}{dt}$  比  $B(t)$  更为直接和方便。 $\frac{dB}{dt}$  是单位时间烧毁面积, 表示火势蔓延的程度。在消防队员到达之前, 即  $0 \leq t \leq t_1$ , 火势越来越大, 即  $\frac{dB}{dt}$  随  $t$  的增加而增加; 开始救火以后, 即  $t_1 \leq t \leq t_2$ , 如果消防队员救火能力足够强, 火势会越来越小, 即  $\frac{dB}{dt}$  应减小, 并且当  $t=t_2$  时  $\frac{dB}{dt}=0$ 。

救援费可分为两部分: 一部分是灭火器材的消耗及消防队员的薪金等, 与队员人数<sup>[5]</sup>及灭火所用的时间均有关, 另一部分是运送队员和器材等一次性支出, 只与队员人数有关。

## 3 模型假设

需要对烧毁森林的损失费、救援费及火势蔓延程度  $\frac{dB}{dt}$  的形式作出假设。

I. 损失费与森林烧毁面积  $B(t_2)$  成正比, 比例系数

$c_1, c_1$  即烧毁单位面积的损失费。

II. 从失火到开始救火这段时间( $0 \leq t \leq t_1$ )内,火势蔓延程度  $\frac{dB}{dt}$  与时间成正比,比例系数  $\beta$  称火势蔓延速度。

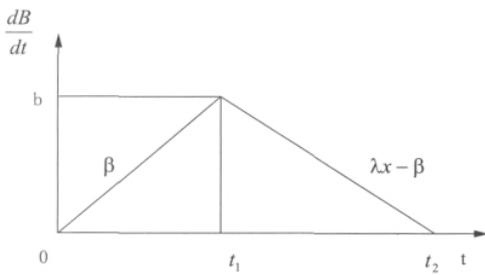
III. 派出消防队员  $x$  名,开始救火以后( $t \geq t_1$ )火势蔓延速度降为  $\beta - \lambda x$ ,其中  $\lambda$  可视为每个队员的平均灭火速度。显然应有  $\beta < \lambda x$ 。

IV. 每个消防队员单位时间的费用为  $c_2$ ,于是每个队员的救火费用是  $c_2(t_2 - t_1)$ ;每个队员的一次性支出是  $c_3$ 。

第 II 条假设可作如下解释<sup>[6]</sup>: 火势以失火点为中心,以均匀速度向四周呈圆形蔓延。所以蔓延的半径  $r$  与时间  $t$  成正比。又因为烧毁面积  $B$  与  $r^2$  成正比,故  $B$  与  $t^2$  成正比,从而  $\frac{dB}{dt}$  与  $t$  成正比。

### 4 建模与求解

根据假设条件 II、III,火势蔓延程度  $\frac{dB}{dt}$  在  $0 \leq t \leq t_1$  线性地增加,在  $t_1 \leq t \leq t_2$  线性地减小。 $\frac{dB}{dt} \sim t$  的图形如下图所示。



记  $t = t_1$  时  $\frac{dB}{dt} = b$ 。烧毁面积  $B(t_2) = \int_0^{t_2} \frac{dB}{dt} dt$  恰

是图中三角形的面积,显然有  $B(t_2) = \frac{1}{2}bt_2$ ,而  $t_2$  满足

$$t_2 - t_1 = \frac{b}{\lambda x - \beta} \tag{1}$$

于是

$$B(t_2) = \frac{1}{2}bt_2 + \frac{b^2}{2(\lambda x - \beta)} \tag{2}$$

根据假设条件 I、IV,森林损失费为  $cB(t)$ ,救援费为  $c_2x(t_2 - t_1) + c_3x$  将(1)、(2)代入,得到救火总费用为<sup>[7]</sup>

$$C(x) = \frac{1}{2}c_1bt_1 + \frac{c_1b^2}{2(\lambda x - \beta)} + \frac{c_2bx}{\lambda x - \beta} + c_3x \tag{3}$$

问题归结为求  $x$  使  $C(x)$  达到最小。

令  $\frac{dC}{dx} = 0$ ,可以得到应派出的队员人数为<sup>[8]</sup>

$$x = \sqrt{\frac{c_1\lambda b^2 + 2c_2\beta b}{2c_3\lambda^2}} + \frac{\beta}{\lambda} \tag{4}$$

### 5 模型评注

结果解释 首先,应派出队员数目由两部分组成,其中一部分  $\frac{\beta}{\lambda}$  是为了把火扑灭所必须的最低限度。因为  $\beta$  是火势蔓延速度,而  $\lambda$  是每个队员的平均灭火速度,所以这个结果是明显的。从图 1 也可以看出,只有当  $x > \frac{\beta}{\lambda}$  时,斜率为  $\lambda x - \beta$  的直线才会与  $t$  轴有交点  $t_2$ 。

其次,派出队员数的另一部分,即在最低限度之上的人数,与问题的各个参数有关<sup>[9]</sup>。当队员灭火速度  $\lambda$  和救援费用系数  $C_3$  增大时,队员数减少;当火势蔓延速度  $\beta$ 、开始救火时的火势  $b$  及损失费用系数  $c_1$  增加时,队员数增加。这些结果与常识是一致的。(4) 式还表明,当救援费用系数  $c_2$  变大时队员数也增大。

实际应用这个模型时, $c_1, c_2, c_3$  是已知常数, $\beta, \lambda$  由森林类型、消防队员素质等因素决定,可以预先制成表格以备查用<sup>[10]</sup>。较难掌握的是开始救火时的火势  $b$ ,它可以由失火到救火的时间  $t$  按  $b = \beta t$  算出,或根据现场情况估计。

评注建立这个模型的关键是对  $\frac{dB}{dt}$  的假设,比较合理而又简化的假设条件 2、3 只能符合无风的情况,在风势的影响下应考虑另外的假设,再者,有人对队员灭火的平均速度  $\lambda$  是常数的假设提出异议,认为  $\lambda$  应与开始救火时的火势  $b$  有关, $b$  越大  $\lambda$  越小,这时要对函数  $\lambda(b)$  作出合理的假设,再得到进一步的结果。

#### 参考文献:

[1] 蔡乐才,朱颢东. 基于 AI 问题的一种“最优”解方法及实现[J]. 四川理工学院学报:自然科学版,2008,21(5):22-25.  
 [2] 傅采慧,刘嘉勇. 网络安全信任模型的研究[J]. 四川

- 理工学院学报: 自然科学版 2006 ,19( 6) : 36-39.
- [3] 苏金明, 阮沈勇. Matlab6. 1 实用指南 [M]. 北京: 电子工业出版社 2002.
- [4] 赫孝良. 数学建模竞赛赛题简析与论文点评 [M]. 西安: 西安交通大学出版社 2002.
- [5] 徐全智, 杨晋浩. 数学建模 [M]. 北京: 高等教育出版社 2003.
- [6] 胡运权, 郭耀煌. 运筹学教程 [M]. 北京: 清华大学出版社 1998.
- [7] [baike.baidu.com/view/496693.htm](http://baike.baidu.com/view/496693.htm) 2010 7-23.
- [8] <http://www.tianguan.com.cn/jj/q/bjwd/009.html> 2007 , 9. 1.
- [9] <http://jiuyuejiu2.8u8.com/jiujingshengchanwenda/012/012.html> 2007 9. 1.
- [10] <http://www.cycnet.com.cn/index.htm> 2007 9. 1.

## Optimization Model of Lowest Cost in Forest Firefighting

WANG Guang-qing

( School of Science , Sichuan University of Science & Engineering , Zigong 643000 , Chian)

**Abstract:** The problem of forest fire is researched. Comprehensively considering the cost of forest loss , the number of firefighters and rescue fee , an optimization model with the target of minimize the total cost is set up , the model is solved through differential method , and then the optimal result is obtained. a feasibility analysis of the results is conducted which has some reference value.

**Key words:** cost of forest loss; total rescue fee; area of forest burned; the spread of fire; average speed of firefighting