第 24 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 5
2011 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2011
文章编号:1673-1549(2011)05-0607-03

判别拓扑空间中的基与子基的方法

秦飞龙[1], 周仲礼[2]

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

摘　要:文章给出了拓扑空间中的基与子基的定义,列出了基与子基的定义判别方法的相关实例。研究了拓扑空间中的基与子基的判定方法,并对基与子基的判定方法给出了证明。并运用判定方法对所给的实例进行了充分的解释或证明。

关键词:基;子基;拓扑空间;子集族

中图分类号:TB115　　**文献标识码**:A

通过对拓扑学基础知识的学习,不难看出拓扑不变性是拓扑空间的重要内容,而基与子基又是拓扑不变性的非常重要一类。拓扑空间的所有元素的并为全空间,而它的任意元素的交集产生基元,基元的并产生拓扑,因此拓扑空间的基与子基在拓扑空间中起着举足轻重的作用。而拓扑学研究空间在拓扑变换(或同胚性)下的不变性;数学分析的连续性,欧氏几何研究刚体运动下的不变性;仿射几何研究的仿射不变性都是几何学研究空间(或图形)在某种变换下的不变性,他们密切相关。因此要研究拓扑不变性,就得研究拓扑空间的基与子基。

1　基的判别方法

1.1　根据定义判别

设(X,τ)是一个拓扑空间,β 是 τ 的一个子集族。如果 τ 的任意元素(即拓扑空间的每一个开集)是 β 中某些元素的并,即对每一个 $U \in \tau$, $\exists \beta_0 \subset \tau$, 使得 $U = \cup_{B \in \beta_0}$, 则称 β 是拓扑 τ 的一个基,或称 β 是拓扑空间 X 的一个基。

例 1　一个度量空间[1]中的所有球形领域构成的集族是这个空间的一个基。

证明　设 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ 为度量空间 X 的所有球形领域,令 $U = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_n$。显然 U 为开集,又因为 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \subseteq X$, 所以 $U = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_n \subseteq X$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ 是这个度量空间的一个基。

1.2　根据基与子集的相关性质及定理进行判断

定理 1　设 β 是拓扑空间(X,τ)的一个开集族(即 $\beta \subset \tau$),则 β 是拓扑空间 X 的一个基的充分必要条件是: $\forall x \in X$ 和 x 的每一个领域 U_x, 存在 $V_x \in \beta$, 使得 $x \in V_x \in U_x$。

证明　充分性:假设定理的条件成立,如果 U 是 X 的一个开集,对于 $\forall x \in U$, 因为 U 是 X 的一个领域,所以存在 $V_x \in \beta$ 使得 $x \in V_x \in U$, 于是 $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U$, 所以, $U = \cup_{x \in U} V_x$, 因此 U 是 β 中某些元素的并,从而 β 是 X 的一个基。

必要性:设 β 是 X 的一个基,则对于每一个 $x \in X$, x 的每一个领域 U_x, 存在 x 的一个开领域 M_X, 使得 $M_X \subset U_X$。由于 M_X 是一个开集,有定义知,存在 $\beta_1 \subset \beta$ 使得 $M_X = \cup_{A \in \beta_1} A$, 于是由 $x \in \cup_{A \in \beta_1} A$ 可知 $V_X \subset \beta_1 (\subset \beta)$, 使得 $x \in V_x \subset \cup = M_X \subset U_X$, 即 β 满足定理中的条件。

例 2　设 X 是一个集合,则 X 的子集族 $\beta, \tilde{\tilde{\beta}}$ 是 X 的同一拓扑的两个基的充分必要条件是 β 和 $\tilde{\tilde{\beta}}$ 满足条件:

(1)若 $x \in B \in \beta$, 则存在 $\tilde{\tilde{B}} \in \tilde{\tilde{\beta}}$ 使得 $x \in \tilde{\tilde{B}} \subset B$。

(2)若 $x \in \tilde{\tilde{B}} \subset \tilde{\tilde{\beta}}$, 则存在 $B \in \beta$ 使得 $x \in B \subset \tilde{\tilde{B}}$。

证明　从分性:设 $\beta, \tilde{\tilde{\beta}}$ 分别是 X 的拓扑 $\tau, \tilde{\tilde{\tau}}$ 的基,由条件(1)知存在 $\tilde{\tilde{B}}_X \in \tilde{\tilde{\beta}}$, 使 $x \in \tilde{\tilde{B}}_X \subset B$, 从而 $B = \cup_{X \in B} \{x\} \subset \cup_{x \in B} \tilde{\tilde{B}}_x \subset B$, 即 $B = \cup_{x \in B} \tilde{\tilde{B}}_x$, 任意 $A \in \tau$, 存在 $\beta_1 \subset \beta$, 使得:

收稿日期:2011-09-09

作者简介:秦飞龙(1983-),男,四川成都人,硕士生,主要从事石油勘探中的数学方面的研究,(E-mail)lida_112@163.com

$A = \cup_{B\in\beta_1} B = \cup_{B\in\beta_1}(\cup_{x\in B}\tilde{\tilde{B}}_x) = \cup_{x\in B,B\in\beta_1}\tilde{\tilde{B}}_x \in \tilde{\tilde{\tau}}$

所以 $\tau \in \tilde{\tilde{\tau}}$。

由条件(2)类似可证 $\tau \Leftrightarrow \tilde{\tilde{\tau}}$, $\tau = \tilde{\tilde{\tau}}$。

必要性:设 β, $\tilde{\tilde{\beta}}$ 是 X 的同一拓扑的两个基,任意 $x \in B \in \beta$, 即 $B \in \mu_x$, 又因为 $\tilde{\tilde{\beta}}$ 是 τ 的基,由定理 1 可以得出结论: $\exists\, \tilde{\tilde{B}} \in \tilde{\tilde{\beta}}$, 使 $x \in \tilde{\tilde{B}} \subset B$, 由条件(1)成立。同理可得条件(2)成立。

故 β, $\tilde{\tilde{\beta}}$ 为同一拓扑的两个基。

例 3 证明欧式平面 R^2 的所有开矩形(即 $(a,b)\times(c,d)$, 其中 (a,b)。(c,d) 为开区间)构成 R^2 的基。

证明 设

$\beta = \{(a,b)\times(c,d): a,b,c,d \in R, a < b, c < d\}$

则 β 是 R^2 的一个开集族, $\forall p = (x,y) \in R^2$, $\forall U \in \mu_p$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(p,\varepsilon) \subset U$, 取 $a = x - \varepsilon/2$, $b = x + \varepsilon/2$, $c = y - \varepsilon/2$, $d = y + \varepsilon/2$, 则 $(a,b)\times(c,d) \subset B(p,\varepsilon) \subset U$, 且 $(a,b)\times(c,d) \in \beta$, 由定理 1 知 β 是 R^2 的基。

定理 2 设 β 是非空集合上一族(即由 X 的一些子基为元素构成的集合)。若满足:

(1) $X = \cup_{B\in\beta} B$。

(2)对 $B_1, B_2 \in \beta$, $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 $W_x \in \beta$ 使得 $x \in W \subseteq B_1 \cap B_2$。

则 β 必是 X 上唯一的拓扑 τ 的基,这个拓扑就是 $\tau = \{A \mid \exists \beta_A \subseteq \beta, A = \cup_{B\in\beta_A} B\}$, 反之,若 β 是某个拓扑的基,则 β 必满足条件(1)、(2)。

证明 当 β 满足条件(1)、(2)时,可根据拓扑的定义证明 τ 是一个拓扑。若 τ' 也是一个以 β 为基的拓扑,则对每个 $A \in \tau'$, A 必是 β 中某些元素之并,从而 $A \in \tau$, 于是 $\tau' \subseteq \tau$, 又由于 $\beta \subseteq \tau'$, 故若 $A \in \tau$。A 必是 β 中某些元素(从而也是 τ' 某些成员)之并,故 $A \in \tau'$, 又得 $\tau \subseteq \tau'$。这样 $\tau = \tau'$, 因而 τ 是 X 中惟一的一个以 β 为基的拓扑。

反之,若已知 X 上的拓扑 τ', 而 β 是 t^* 的基,则 $X \in t^*$, 从而 X 是 β 中某些元素之并;但 β 的所有成员都在 X 中,即得 $X = \cup_{x\in\beta} B$。再若 $B_1, B_2 \in \beta$, $x \in B_1 \cap B_2$, 则 $B_1 \cap B_2 \in \tau *$ 从而 $B_1 \cap B_2$ 是 β 中元素之并。这样必有一个 $W_x \in \beta$ 使 $x \in W_x \subseteq B_1 \cap B_2$, 即 β 必满足条件(1)、(2)。证毕。

例 4 证明实数集合 R 有一个拓扑有一个拓扑 τ 以集族 $A' = A\{(a,\infty \mid a \in R)\}$ 为它的一个基。

证明 $\beta = \{(a,\infty): a \in R\}$, 显然 $R = \cup_{B\in\beta} B$, 设 $B_1 = (a,\infty)$, $B_2 = (b,\infty) \in \beta$ 则, $B_1 \cap B_2 = \begin{cases}(a,\infty), a \geq b \\ (b,\infty), a < b\end{cases}$, 所以 $B_1 \cap B_2 \in \beta$, 由定理 2 知,R 是以 β 为基的拓扑。

定理 3 设 (X,T,β) 为拓扑空间,则算子[2] i_β (算子 C_β) 是内部运算(闭包运算)[3] 当且仅当 β 为 T 的基。

证明 由对偶性[4],我们只要对算子 i_β 进行证明。设 i_β 为内部运算。先证明对于任意 $G \in T$, 有 $i_\beta(G) = G$, 由粗超集理论[5]的性质 $i_\beta(G) \subseteq G$, 设 $x \in G$, 有存在有限元素 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \in \beta$ 使得 $x \in \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \in \beta \subseteq G$。又因为 i_β 为内部运算,由粗糙集理论下近似集与上近似集中的基本性质知:

$i_\beta(B_1) \cap i_\beta(B_2) \cap \ldots \cap i_\beta(B_n) =$

$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$;

又 $i_\beta(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq i_\beta(G)$, 所以 $x \in i_\beta(G)$, 即 $G \subseteq i_\beta(G)$, 故 $i_\beta(G) = G$。现在,对于任意 $G \in T$, 由粗超集理论知 $i_\beta(G) = \cup\{B \in \beta \mid B \subseteq G\}$, 所以 β 是 T 的基,反之,设 β 是 T 的基,由 $A \subseteq X$, 有 $i_B(A) = i(A)$, 因为 i 为 X 的内部运算,所以 i_β 也为 X 的内部运算。

2 子基的判别方法

2.1 根据子基定义进行判别

设 (X,ρ) 是一个拓扑空间, φ 是 ρ 的一个族。如果 ρ 是所有非空有限子族之交构成的集族,即

$\beta = \{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \mid S_i \in \varphi, i = 1,2,\ldots n; n \in z_+\}$

是拓扑的 ρ 的一个基,则集族 φ 是拓扑 ρ 的一个子基,或称集族 φ 是拓扑空间 X 的一个子基。

例 5 实数空间 R 的一个子集族 $\varphi = \{(a,\infty) \mid a \in R\} \cup \{(-\infty, b) \mid b \in R\}$ 是实数空间 R 的一个子基。

这是因为 φ 是实数空间 R 的一个开集族,并且 φ 的每一个有限非空子族之交的全体构成集族恰好是开区间构成的族并上 $\{\varphi\}$, 显然它是实数空间 R 的一个子基。

2.2 根据子基的性质及定理进行判别

定理 4 设 X 是一个集合, φ 是 X 的一个子集族(即 $\varphi \subset p(x)$)。如果 $X = \cup_{S\in\varphi} S$, 则 X 是唯一一个拓扑 p 以 φ 的子基,并且若令

$\beta = \{S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \mid S_i \in \varphi, i = 1,2,\ldots n; n \in z_+\}$

则 $p = \{\bigcup_{B\in\beta_1} B \mid \beta_1 \subset \beta\}$。

证明 令 β 和 τ 满足定理 4,显然,(1) $X = \cup_{B\in\beta} B$。(2)如果 $\forall B_1, B_2 \in \beta$, $\exists B \in \beta$, 使得 $B \subset B_1 \cap B_2$, 即对任何 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$, 由基的判别法定理知 β 是 τ 的一个基。

如果 $\tilde{\tau}$ 是 X 的一个拓扑,它以 φ 为一个子基,根据子基的定义,可以 β 为基,根据基的惟一性,我们有 $\tilde{\tilde{\tau}} = \tau$。

例 6　设 A 为一集合,对于每一 $\alpha \in A$, (X,τ_α) 为拓扑空间,记 $\tau *$ 为 X 的以 $\cup_{\alpha \in A} \tilde{\tilde{\tau}}_\alpha$ 为子基的拓扑。证明:若 τ 为 X 的拓扑,并且对于 $\alpha \in A$, $\tau_\alpha \subset \tau$, 则 $\tau \Leftrightarrow \tau *$。

证明　因为 $\mu_{a \in A}\tau_\alpha$ 为 $\tau *$ 的子基,所以

$\beta = \{S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n : S_i \in \mu_{a \in A}\tau_\alpha, i = 1,2,...n; n \in N\}$ 为 $\tau *$ 的基,任意 $B \in \beta$, 则存在 $S_i \in \mu_{a \in A}\tau_\alpha, i = 1,2,...n$, 使得 $B = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, 由于对每一个 $\alpha \in A$, $\tau_\alpha \subset \tau$, 所以 $\mu_{a \in A}\tau_\alpha \subset \tau$, 即 $S_i \subset \tau, i = 1,2,...n$, 从而 $B \in \tau$。因此 $\beta \subset \tau$, 故 $\tau * \subset \tau$。

定理 5　设 (X,T,β) 为拓扑空间, $B \in \beta$ 是 β 的可约元[6],令 $\beta_1 = \beta - \{B\}$, 则 B_1 任是 (X,τ) 的一个子基。

证明　由可约元定义, β_1 仍然是 X 的覆盖[7],其次,设 $G \in T$, $x \in G$, 则存在有限元 $B_1, B_2 ... B_n \in \beta$ 使 $x \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \subset G$, 若对任意 i, $B_i \neq B$, 则 $B_i \in \beta - \{B\}$。若 B_i 中有等于 B 的情况,不妨设只有一个 $B_i = B$, 因 B 是 β 的可约元,所以 B 可表示为 $\beta - \{B\}$ 中若干元素的并。因此比存在 $B_1' \in \beta - \{B\}$, 使得 $x \in B_1' \subseteq B$, 此时 $x \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \subset G$, 这就证明了 β_1 中任意有限个元素的交集所构成的集族为拓扑 τ 的基,所以 β_1 仍是 (x,τ) 的一个子基。

参 考 文 献:

[1] 熊金城.点击拓扑讲义[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2] 刘 妮.闭包算子与 Topped 交结构的序关系[J].陕西师范大学学报:自然科学版,2010,38(6):14-18.

[3] 崔艳丽,吴洪博.闭包算子空间范畴及其性质研究[J].计算机工程与应用,2010,46(27):54-57.

[4] 吴红博,王昭海.对偶导集及其应用[J].数学的实践与认识,2010,40(20):138-141.

[5] 陈 军,高晓光,符小卫.基于粗糙集理论与贝叶斯网络的超视距空战战术决策[J].系统仿真学报,2009,21(6):21-23.

[6] 林金坤.拓扑学基础[M].北京:科学出版社,2004.

[7] 张燕兰,李进金.广义覆盖粗集的约简[J].模糊系统与数学,2010,24(3):138-142.

Discriminant Method in Base and Subbase of theTopological Space

Qin Fei-long, *Zhou Zhong-li*

(College of Management Science, Chengdu University of Technology ,Chengdu 61000, China)

Abstract: Given the topological space base and the subbase of the definition, lists the base and the son of the definition of relevant example discriminant method. The study of a topological space, and the subbase of the yankees and the methods to determine the base and the subbase of the judge method is proved. It gives the corresponding for example, and used the determination method for the giving an example of the full explanation or certificate.

Key words: base; subbase; topological space; subset family